Prof. Dr. Rudolf Stens
Kármánstraße 11
52062 Aachen
3. Etage

Tel.: +49 241 80 94532
Sekr.: +49 241 80 92212
Fax: +49 241 80 92532
stens@mathA.rwth-aachen.de
http://www.matha.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
SoSe 13

24. September 2013
Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik II

Aufgabe 1 **[8 Punkte]**

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und zweimal stetig differenzierbar in (a, b). Es seien $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ und $f(x_i) = \pi$ für $i = 1, 2, 3$.
Zeigen Sie, dass es ein $y \in (a, b)$ gibt mit $f''(y) = 0$.

Lösung

Mit dem Mittelwertsatz existieren $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ und $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ mit

$$0 = \pi - \pi = f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi_1)(x_2 - x_1) \quad \text{und} \quad 0 = \pi - \pi = f(x_3) - f(x_2) = f'(\xi_2)(x_3 - x_2).$$

Da $x_1 < x_2 < x_3$ gilt, muss auch $\xi_1 < \xi_2$ gelten. Weiterhin muss $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$ sein. **[5]**
Wendet man nun den Mittelwertsatz auf f' an, so erhält man: **[1]**

$$\exists\, y \in (\xi_1, \xi_2) \text{ mit } 0 = f'(\xi_2) - f'(\xi_1) = f''(y)(\xi_2 - \xi_1). \qquad \textbf{[1]}$$

Da $a < \xi_1 < \xi_2 < b$ gilt, ist das die Behauptung. **[1]**

Aufgabe 2 **[3+3=6 Punkte]**

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte, sofern sie existieren:

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x^2 - 4}$, **(b)** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{2x^p}$, $p > 0$.

Lösung

(a) Seien $f(x) := 2x^2 - x - 6$ und $g(x) := x^2 - 4$. Dann: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} g(x) = 0$.

Also ist der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ vom Typ „$\frac{0}{0}$“.

Um die Regel von de l'Hospital anzuwenden, betrachte $f'(x) = 4x - 1,\ g'(x) = 2x$. **[1]**

Dann ist $g'(x) \neq 0$ für alle $x \neq 0$, und es gilt $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x-1}{2x} = \dfrac{7}{4}$. **[1]**

Da der letzte Grenzwert existiert, existieren nach der Regel von l'Hospital auch alle davor, und es gilt $\dfrac{7}{4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x)}{g(x)}$. **[1]**

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log(x)}{2x^p}$, $p > 0$, ist vom Typ „$\frac{\infty}{\infty}$“. Mit $f(x) := \log(x)$ und $g(x) := 2x^p$ folgt

$f'(x) = \dfrac{1}{x},\ g'(x) = 2p \cdot x^{p-1} \neq 0$ für $x \neq 0$. **[1]**

Dann gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{2p \cdot x^{p-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{2p \cdot x^p} = 0$. **[1]**

Da der letzte Grenzwert existiert, existieren nach der Regel von l'Hospital auch alle davor, und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0$. **[1]**

Aufgabe 3 **[4+4+9+3=20 Punkte]**

(a) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^2 \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(x+1)}{x+1}\,dx$.

(c) Berechnen Sie für $b > 2$ das Integral $\displaystyle\int_2^b \frac{1}{(x+1)\cdot(x-1)^2}\,dx$.

(d) Untersuchen Sie das uneigentliche Integral $\displaystyle\int_3^\infty \frac{4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$ auf Konvergenz.

Lösung

(a) Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned}\int_1^2 \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)dx &= x\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{x}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2 x\cdot\tfrac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\cdot\left(-\tfrac{1}{x^2}\right)dx \quad \textbf{[2]}\\ &= 2\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)-\arctan(1)+\tfrac{1}{2}\int_1^2\tfrac{2x}{1+x^2}\,dx\\ &= 2\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)-\arctan(1)+\tfrac{1}{2}\log(1+x^2)\Big|_1^2 \quad \textbf{[1]}\\ &= 2\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\log(5)-\tfrac{1}{2}\log(2)\\ &= 2\cdot\arctan\left(\tfrac{1}{2}\right)-\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}\log\left(\tfrac{5}{2}\right). \quad \textbf{[1]}\end{aligned}$$

(b) Wir substituieren $z=\log(x+1)$, $dz=\frac{1}{x+1}dx$ **[2]**
und erhalten

$$\int_0^1 \tfrac{\log(x+1)}{x+1}\,dx = \int_0^{\log(2)} z\,dz = \tfrac{1}{2}(\log(2))^2. \quad \textbf{[2]}$$

(c) Wir verwenden zunächst Partialbruchzerlegung um den Integranden umzuschreiben.
Wähle den Ansatz $\dfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)^2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$. **[2]**
Dann ergibt sich $A=\dfrac{1}{4}, B=-\dfrac{1}{4}$ und $C=\dfrac{1}{2}$. **[2]**
Damit folgt nun

$$\begin{aligned}\int_2^b \tfrac{1}{(x+1)\cdot(x-1)^2}\,dx &= \int_2^b \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{x+1}-\tfrac{1}{4}\tfrac{1}{x-1}+\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{(x-1)^2}\,dx \quad \textbf{[3]}\\ &= \tfrac{1}{4}\log(x+1)\Big|_2^b-\tfrac{1}{4}\log(x-1)\Big|_2^b-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x-1}\Big|_2^b\\ &= \tfrac{1}{4}\log(b+1)-\tfrac{1}{4}\log(b-1)-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{b-1}-\tfrac{1}{4}\log(3)+0+\tfrac{1}{2}. \quad \textbf{[2]}\end{aligned}$$

(d) Für $x\geq 3$ hat man $-x^2\geq -\frac{1}{3}x^3$ und $-x\geq \frac{1}{9}x^3$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}x^3-x^2-x+1 &\geq x^3-\tfrac{1}{3}x^3-\tfrac{1}{9}x^3+1\\ &\geq \tfrac{5}{9}x^3.\end{aligned}$$

Außerdem hat man $4x+1\leq 4x+x=5x$. Damit erhält man

$$\tfrac{4x+1}{x^3-x^2-x+1}\leq \tfrac{5x}{\frac{5}{9}x^3}\leq 9\cdot x^{-2}. \quad \textbf{[2]}$$

Da das Integral $\int_3^\infty \frac{9}{x^2}\,dx$ konvergiert, liefert das Majorantenkriterium auch die Konvergenz des Integrals $\int_3^\infty \frac{4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$. **[1]**
Alternativ lässt sich auch der Wert des Integrals ähnlich wie in (b) für eine feste obere Grenze $B>3$ berechnen und dann der Grenzwert $B\to\infty$ bestimmen.

Aufgabe 4 **[9 Punkte]**

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} u''(t) - 2\pi u'(t) + \pi^2 u(t) = \pi^2, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(1) = 1, \\ u'(1) = e^\pi. \end{cases}$$

Lösung

1. Homogene Lösung

Für das charakteristische Polynom erhalten wir

$$\lambda^2 - 2\pi\lambda + \pi^2 = (\lambda - \pi)^2. \qquad [\mathbf{1}]$$

Damit liegt eine doppelte Nullstelle $\lambda = \pi$ vor, und die allgemeine homogene Lösung ist gegeben durch

$$u(t) = e^{\pi t}(\alpha + t\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \qquad [\mathbf{2}]$$

2. Partikuläre und allgemeine Lösung

Als partikuläre Lösung sehen wir direkt (oder bestimmen durch einen Ansatz vom Typ der rechten Seite)

$$u_p(t) = 1. \qquad [\mathbf{2}]$$

Damit erhalten wir als allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$u(t) = 1 + e^{\pi t}(\alpha + t\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \qquad [\mathbf{1}]$$

3. Anfangswertproblem

Wir bestimmen α und β aus den Gleichungen

$$u(1) = 1 + e^\pi(\alpha + \beta) = 1 \quad \text{und} \quad u'(1) = \pi e^\pi(\alpha + \beta) + \beta e^\pi = e^\pi. \qquad [\mathbf{1}]$$

Man erhält sofort $\beta = 1$ und $\alpha = -1$. Damit ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch **[1]**

$$u(t) = 1 + e^{\pi t}(-1 + t). \qquad [\mathbf{1}]$$

Aufgabe 5 **[11 Punkte]**

Die Funktionenschar $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei für $\alpha \geq 0$ gegeben durch $f_\alpha(x,y) := x^2 + \alpha y^2$.
Bestimmen Sie, in Abhängigkeit von α, alle kritischen Punkte von f_α, und geben Sie deren Typ an.

Lösung

f_α ist als Produkt bzw. Summe zweifach stetig diff'barer Funktionen zweifach stetig diff'bar. **[1]**
Für die partiellen Ableitungen gilt: **[3]**

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = 2\alpha y,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f_\alpha(x,y) = 2, \qquad \frac{\partial^2}{\partial y^2} f_\alpha(x,y) = 2\alpha \text{ und}$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f_\alpha(x,y) = 0.$$

Mit der notwendigen Bedingung für kritische Punkte,

$$\frac{\partial}{\partial x} f_\alpha(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f_\alpha(x,y) = 0, \qquad \textbf{[1]}$$

erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x = 0, \\ 2\alpha y = 0. \end{cases}$$

Für $\alpha > 0$ erhält man als einzigen kritischen Punkt $(0,0)$. **[1]**
Für $\alpha = 0$ liest man ab, dass alle Punkte der Form $(0,y),\ y \in \mathbb{R}$, kritische Punkte sind. **[1]**
Weiter gilt

$$\left[\left(\frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial y^2} \right] = -4\alpha$$

sowie

$$\left[\frac{\partial^2 f_\alpha(x,y)}{\partial x^2} \right]_{|(x,y)=(0,0)} = 2 > 0. \qquad \textbf{[2]}$$

Also liegt, für $\alpha > 0$ in $(0,0)$ ein Minimum vor. **[1]**
Für $\alpha = 0$ argumentiert man, dass die Funktion f_0, gegeben durch $f_0(x,y) = x^2$, nur nicht-negative Werte annehmen kann und für $x = 0$ den Wert 0 annimmt, also minimal wird.
Im Fall $\alpha = 0$ liegen also in allen Punkten der Form $(0,y),\ y \in \mathbb{R}$, lokale Minima vor. **[1]**