Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 1996

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(2) $11^n + 5^n + 4$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit

(2)
$$a_n = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\sin n}{n^2}\right) & \text{für } n = 4, 6, 8, \ldots \\ 1 + \dfrac{4}{n^2} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ bestimme man eine Zahl $N(\varepsilon) > 0$ mit

$$n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon .$$

Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom

(1)
$$P(x) = x^4 - 4x^2 + x + 1 .$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, daß P (mindestens) 4 Nullstellen besitzt, und geben Sie für jede der 4 Nullstellen ein Intervall an, in dem sich die Nullstelle befindet (die Angabe von $(-\infty, +\infty)$ ist keine gültige Antwort).

Aufgabe 4: Man berechne

(2,5)
$$\text{a.)} \quad \int \frac{dx}{e^x + 4e^{-x}} .$$

$$\text{b.)} \quad \int_1^e \sin(\log x)\, dx .$$

Aufgabe 5: Gegeben sei die ebene Kurve

(2)
$$C : \begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t + \log\tan\dfrac{t}{2} \end{cases} \qquad \left(\frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{4}\right) .$$

Zeigen Sie, daß für ihre Bogenlänge gilt: $L(C) = \log 2$.

Aufgabe 6: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

(2)
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k!} \left(\frac{2^k}{k!} + \frac{1}{2^k} \right) x^k$$

konvergiert.

Aufgabe 7: Es seien sechs beliebige Zahlen $a_1, a_2, ..., a_6 \in \mathbb{R}$ gegeben.
Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 5 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0 .$$

Aufgabe 8: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2,5)

a.) Man berechne A^{-1}.

b.) Man berechne alle Eigenwerte von A.

c.) Man beweise, daß jeder Eigenvektor der gegebenen Matrix A auch Eigenvektor von $(A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1}$ ist.
