**Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen**
**Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans**
**Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 1997**

**Teil A**

**Höhere Mathematik I + II**

---

**Aufgabe 1:** Es sei $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$ und

(2,5)
$$f(x) = x^n - 6(n-1)!\,x + n! \qquad (x \in \mathbb{R}) .$$

a.) Beweisen Sie, daß $f$ in $\left[0 \,,\, \frac{n}{e}\right]$ wenigstens eine Nullstelle besitzt.

b.) Beweisen Sie, daß $f$ in $\mathbb{R} \setminus \left[0 \,,\, \frac{n}{e}\right]$ mindestens eine weitere Nullstelle besitzt.

**Hinweis:** Die Ungleichung $e^x > \frac{x^n}{n!}$ $(x > 0)$ mag nützlich sein.

---

**Aufgabe 2:** Man berechne

(2)

**a.)** $$\int \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 1}}\, dx \qquad (x > 1) \;;$$

**b.)** $$\int_0^{1/2} \frac{x^3 dx}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad .$$

---

**Aufgabe 3:** Untersuchen Sie

(1,5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)\;(n+2)}$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz.

---

**Aufgabe 4:** Beweisen Sie, daß die unendliche Reihe

(2)
$$\sum_{n=2}^{\infty} n^p \left\{ 2\sqrt{n} - \sqrt{n-1} - \sqrt{n+1} \right\}$$

für $p < 1/2$ konvergent und für $p \geq 1/2$ divergent ist.

---

**Aufgabe 5:** Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$ , für welche

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{7n} + \log n}{\sqrt[3]{n} \cdot 8^{7n}} \; x^{7n}$$

konvergiert.

---

**Aufgabe 6:** Durch einen Potenzreihenansatz $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bestimme man die Lösung des Anfangswertproblems

(2,5)
$$(x^2 - 1)\, y'' = 6y \qquad (x > 0)$$
$$y(0) = 0 \, , \quad y'(0) = 1 \quad .$$

---

**Aufgabe 7:** Man bestimme Maximum und Minimum der Funktion $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ mit

(2)
$$f(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \cos^2 x \quad .$$

---

**Aufgabe 8:** Gegeben sei das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

(1,5)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \quad .$$

**a.)** Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$ , für die $A\underline{x} = \underline{b}$ nicht lösbar ist.

**b.)** Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$ , für die $A\underline{x} = \underline{b}$ unendlich viele Lösungen besitzt.

**c.)** Gibt es $t \in \mathbb{R}$ so, daß $A\underline{x} = \underline{b}$ eindeutig lösbar ist ? (Begründung !)

---