

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$(2,5) \quad \frac{4^n}{n+1} < \binom{2n}{n} .$$

Bemerkung: Für $k, n \in \mathbb{N}$ gilt $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}$

Aufgabe 2: Man beweise, daß die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(3,0) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2 \sin^2(2x)}{x} & \text{für } x > 0 \\ \log(1-3x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

in $x_0 := 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon .$$

Aufgabe 3: Man berechne

$$(2,0) \quad \int_1^2 \frac{8x}{4x^2 - 12x + 5} dx .$$

Aufgabe 4: Man beweise, daß die Gleichung

$$(1,5) \quad 5(\log x)^4 - 8(\log x)^3 + \log x + 1 = 0$$

mindestens eine Lösung x in $(0, 3)$ besitzt.

Aufgabe 5: Man bestimme die Lösung $u(x)$ des Anfangswertproblems

$$(2,5) \quad u'(x) + \frac{1-x}{1+x} u(x) = \frac{1-x}{1+x} ,$$
$$u(0) = -1 .$$

Aufgabe 6: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)^n n!} .$$

Aufgabe 7: Gegeben sei das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

(3,5)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit „**ja**“ oder mit „**nein**“
(eine Begründung ist nicht erforderlich):

- (a) Ist das Gleichungssystem lösbar ?
- (b) Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar ?
- (c) Ist $\text{Rang } A = 3$?
- (d) Gilt für die Unbekannte x_2 : $x_2 = 1$?
- (e) Gilt für die Unbekannte x_1 : $x_1 = 3$?
- (f) Gilt $-x_4 + x_5 = 1$?
- (g) Kann man die Unbekannte x_3 willkürlich wählen ?

Zur Bewertung von Aufgabe 7:

Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,5 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.
