Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2001

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Gegeben sei die Zahlenfolge $\left\{a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ mit $a_n := \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{n}$.

(5)

Man beweise, daß die Zahlenfolge $\left\{S_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ mit

$$S_n \;:=\; \frac{a_1 \;+\; a_2 \;+ \cdots +\; a_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

gegen Null konvergiert.

Aufgabe 2: Man bestimme alle Eigenwerte und den zum kleinsten Eigenwert zugehörigen – normierten – Eigenvektor der Matrix

(7)

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f : \left[-\frac{3}{2}\,,\,\frac{3}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit

(9)

$$f(x) \;=\; \begin{cases} 2 & \text{für } -\frac{3}{2} \;\leq\; x \;<\; 1\;, \\ 4x^3 \;-\; 2x^2 \;+\; 3x \;-\; 4 & \text{für } 1 \;\leq\; x \;\leq\; \frac{3}{2}\quad . \end{cases}$$

Man beweise $f'_+(1) = 11$, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß

$$\left|\; \frac{f(x) - f(1)}{x \;-\; 1} \;-\; 11 \;\right| \;<\; \varepsilon$$

für alle x mit $1 < x < 1 + \delta$ gilt.

Aufgabe 4: Man berechne

(12)

$$\int \frac{4\;dx}{(x-1)^2\;(x^2+1)} \qquad (x \neq 1)\;.$$

---

b i t t e   w e n d e n   !!

Aufgabe 5: Man beweise mit Hilfe der Taylorschen Formel:

(9)

$$\left| \frac{\log\,(1+x)}{(1+x)^2} \;-\; x \right| \;<\; 3x^2 \qquad\qquad (x > 0)\ .$$

Aufgabe 6: Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

(9)

$$u'' \;-\; 2u' \;+\; u \;=\; 2e^x \;+\; 6xe^x \;+\; 12x^2e^x\ ,\ x \;>\; 0\ ,$$
$$u(0) \;=\; -1\ ,\ u'(0) \;=\; 1\ .$$

Aufgabe 7: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(7)

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin\ \frac{1}{x}}{(1+x)\ \sqrt{\log\,(1+x)}}\ dx$$

Aufgabe 8: Gegeben sei die Fläche

(5)

$$z \;=\; f(x,y) \;=\; \frac{1}{xy} \qquad (x \cdot y \neq 0)\ .$$

Man bestimme diejenige Tangentialebene an die Fläche $z = f(x,y)$, welche parallel zur Ebene $x + y + z = 8$ ist.

Aufgabe 9: Mit Hilfe der Definition beweise man, daß die Funktion $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

(7)

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 4 \;+\; 2y^2 \sin\dfrac{1}{y} \;+\; 3x^2 \cos\dfrac{1}{x} \;+\; 2x \;-\; 7y \;-\; 4x^2 \;+\; \sin(xy) & \text{für } x^2 \;+\; y^2 \;>\; 0 \\ 4 & \text{für } x^2 \;+\; y^2 \;=\; 0 \end{cases}$$

im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.
