Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2003

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion

(5)

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \; > \; \frac{1}{2}\, n\sqrt{n} \qquad (n \in \mathbb{N})\ .$$

Aufgabe 2: Es sei $f\colon\ (-4,4) \to \mathbb{R}$ mit

(6)

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \log(1+2x^2) & \text{für } -4 \;<\; x \;\leq\; 0\ , \\[2ex] \dfrac{\sin(2x)}{2\sqrt{x} \;-\; x} & \text{für } 0 \;<\; x \;<\; 4\ . \end{cases}$$

Man beweise, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, dass gilt:

$$\left|x - x_0\right| \;<\; \delta \;\Longrightarrow\; \left|f(x) - f(x_0)\right| \;<\; \varepsilon\ .$$

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(2) **(a)** $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n!} \left(1 \;-\; \frac{2}{n!}\right)^{n!}\ ,$$

(3) **(b)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{5^n}\ .$$

Aufgabe 4: Man bestimme die Eigenwerte und die zugehörigen (normierten) Eigenvektoren der Matrix

(12)

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Aufgabe 5: Es sei $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{\log\cosh x}{x^2} & \text{für } x \;\neq\; 0\ , \\[3ex] \dfrac{1}{2} & \text{für } x \;=\; 0\ . \end{cases}$$

(2) **(a)** Man zeige, dass f in $x = 0$ stetig ist.

(3) **(b)** Man berechne $f'(0) \;=\; \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) \;-\; f(0)}{x \;-\; 0}\ .$

---

b i t t e   w e n d e n !!!

Aufgabe 6: Man zeige, dass die Funktion $f\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}$

(4)
$$f(x) \ = \ \begin{cases} -x\ , & \text{für } \ x \in \big(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\big) \ \cap \ [0,1] \\ 1\ , & \text{für } \ x \in \mathbb{Q} \ \cap \ [0,1] \end{cases}$$

nicht Riemann–integrierbar ist.

Aufgabe 7:

(4) **(a)** Man berechne $\int \ x \cdot \operatorname{artanh} x \ dx \quad \big(|x| < 1\big)$.

(3) **(b)** (α) Man zeige: $I \ := \displaystyle\int_0^1 \ \sqrt{\frac{x}{x+1}} \ dx \ < \ \frac{2}{3}$

(z.B. mit dem (erweiterten) Mittelwertsatz der Integralrechnung).

(3) (β) Man zeige: $I \ = \ \sqrt{2} \ - \ \log\Big(1+\sqrt{2}\Big)$.

Aufgabe 8: Mit Hilfe der Taylorformel zeige man:

(6)
$$|x| \ < \ 10^{-2} \ \Longrightarrow \ \left|\arctan(x^2) \ - \ x^2\right| \ < \ 10^{-12} \ .$$

Aufgabe 9: **(a)** Man errate eine Lösung $u_1 \not\equiv 0$ der Differentialgleichung

(4)
$$Du \ \equiv \ u'' \ - \ \frac{2}{x^2}\, u \ = \ 0 \qquad (x \ > \ 0)$$

und bestimme die Lösungsgesamtheit von $Du = 0$.

(b) Man löse das Anfangswertproblem

(6)
$$\begin{cases} u'' \ - \ \dfrac{2}{x^2}\, u \ = \ 60x^2 \ + \ 48x \qquad (x \ \geq \ 1)\ , \\ u(1) \ = \ u'(1) \ = \ 0 \ . \end{cases}$$

Aufgabe 10: Durch den Graphen $G(f)$ mit

$$f\colon\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}\ , \quad f(x,y) \ = \ 5 \ + \ 2x \ - \ 2y \ - \ \frac{9}{2}\, xy$$

ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben.

(2) **(a)** Man bestimme die Tangentialebene E_1 von $G(f)$ im Punkt $P_1 = (0,0,5)$.

(2) **(b)** Man bestimme den Abstand des Nullpunktes $(0,0,0)$ von E_1.

(3) **(c)** Man gebe — sofern möglich — einen Punkt $P_2 \ = \ (x_2, y_2, z_2) \ \neq \ P_1$ mit $x_2 = 2$ an, für den die Tangentialebene E_2 von $G(f)$ orthogonal zu E_1 ist.
