Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2004

<u>Teil A</u>

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:
(6)

$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > 1 \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Aufgabe 2: Es sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit
(8)

$$f(x) = \begin{cases} \cos\Big(4\sqrt{|x|}\Big) & \text{für } -1 < x < 0 \\ \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} & \text{für } 0 \le x < 1 . \end{cases}$$

Man beweise, daß f in $x_0 = 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ angibt mit

$$x \in (-1,1) \ \wedge \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon .$$

Aufgabe 3:
(4) **(a)** Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2^n} .$$

(5) **(b)** Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

konvergiert.

Aufgabe 4: Gegeben sei der Punkt $P = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$ und die Ebene
(8)

$$E\colon \underline{x} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} .$$

Man bestimme den Lotfußpunkt von P bezüglich E und den Abstand des Punktes P von E.

---

b i t t e   w e n d e n !!!

Aufgabe 5:

(6) **(a)** Man berechne

$$I \ := \int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{2x+3}{x^2 \ + \ x \ + \ \dfrac{5}{4}} \ dx$$

und zeige: $0 \ < \ I \ < \ 1 \ + \ \dfrac{\pi}{2}$.

(5) **(b)** Man berechne

$$\int\limits_{2}^{3} \frac{x^2 dx}{(x^2-1)^2} \qquad \text{(partielle Integration)} \ .$$

Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion $f\colon \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \ = \ \frac{1}{7}\, x^7 \ + \ 3x^5 \ - \ 10x^3 \ + \ 15x \ - \ \frac{71}{7} \ .$$

(5) **(a)** Man beweise, daß zu $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$ existiert, und daß $g(y)$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(3) **(b)** Man berechne die Zahlenwerte $g(-2)$, $g'(-2)$, $g''(-2)$.

Aufgabe 7: Man beweise mit Hilfe der Taylorformel:

(8)

$$x \ - \ \frac{3}{2}\, x^2 \ \le \ \frac{\log(1+x)}{1+x} \ \le \ x \ + \ x^2 \qquad (x \ge 0) \ .$$

Aufgabe 8: Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

(12)

$$\begin{cases} x^2 u''(x) \ - \ 2x \ u'(x) \ + \ (2-x^2) \ u(x) \ + \ x^3 \ = \ 0 \ , \quad x \ > \ 1 \ ; \\[2ex] u(1) \ = \ u'(1) \ = \ 1 \ . \end{cases}$$

Hinweis: $u(x) = x \ \cdot \ e^{\alpha x}$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$ sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung.
