Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1996

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise, daß die Funktion

(2)
$$f(x) \;=\; \begin{cases} x^2 \;-\; 1 & \text{für} \quad x \;\leq\; 1 \\ 5\log x & \text{für} \quad x \;>\; 1 \end{cases}$$

im Punkt $x_0 = 1$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ im $\delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß gilt:

$$|x-1| \;<\; \delta \quad \Longrightarrow \quad \big|f(x) - f(1)\big| \;<\; \varepsilon \;.$$

Aufgabe 2: Man berechne:

(3)

a.) $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{x+1}}\,dx \qquad (x \;\geq\; 0)\;,$ b.) $\displaystyle\int_0^1 (x-1)\;\log\,(x+1)\;dx\;,$

c.) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} 2\cos x\;\sqrt{2(1+\sin x) \;-\; \cos^2 x}\;\;dx\;.$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion f mit $D(f) = \Big[\,\sqrt[4]{0{,}9}\;,\;\infty\Big)$ und

(2, 5)
$$f(x) \;:=\; \tanh\left(x^5 \;-\; x \;-\; \cos\left(\frac{\pi}{2}\;x\right)\right)\;.$$

a.) Man beweise, daß zu $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $x = g(y) = f^{-1}(y)$ existiert.

b.) Man berechne die Zahlenwerte $g(0)\;,\;g'(0)\;,\;g''(0)\;.$

Aufgabe 4: Man bestimme diejenige Lösung der Riccatischen Differentialgleichung

(3) $(*)$
$$u' \;=\; -\;(2x+1)\;u \;+\; u^2 \;+\; 1 \;+\; x \;+\; x^2 \qquad (x \;\geq\; 0)\;,$$

welche die Anfangsbedingung $u(0) = \dfrac{1}{2}$ erfüllt, indem man zunächst eine partikuläre Lösung $u_0(x) = a \cdot x$ $(a \in \mathbb{R}$ geeignet) von $(*)$ bestimmt.

Aufgabe 5: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(2)

a.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{7/4}}{\big((k+2)^3 \;-\; (k+1)^3\big)^{3/2}}$ b.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\big\{(2k)!\big\}^2}{(4k)! \;-\; \sqrt{k!}}$

Aufgabe 6: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche

(1,5)
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cosh\,(3k)}{\arctan k}\,(x-1)^{2k}$$

konvergiert.

Aufgabe 7: Gegeben seien die Ebenen

(2)
$$E_1 \;:\; 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4\,,$$

$$E_2 \;:\; \underline{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$$

und die Geraden

$$g_1 \;:\; \underline{x} = \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})\,,$$

$$g_2 \;:\; \underline{x} = \underline{x}(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R})\,.$$

a.) Man beweise, daß g_1 in E_1 und g_2 in E_2 liegt.

b.) Spannen g_1 und g_2 eine Ebene auf ? (Beweis !)
