Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1997

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2 - \dfrac{1}{x}$.

(2,25) Man beweise, daß für jedes $M > 1$ die Funktion f auf $[1,M]$ gleichmäßig stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß für alle $x, y \in [1,M]$ gilt:

$$|x-y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon \ .$$

Aufgabe 2: Man beweise, daß die durch

(2,5)
$$f \ : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \qquad f(x) := \sinh\,(x^3 - 3x^2 + 3x - 2)$$

definierte Funktion f eine Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt und bestimme die Zahlenwerte $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$.

Aufgabe 3: Man berechne

(1,5)
$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{(2\sin x \ + \ 5) \ \cos x}{2\sin^2 x \ + \ 3\sin x \ + \ 1} \, dx \quad .$$

Aufgabe 4: Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

(2)
$$\begin{cases} u'(x) \ + \ \dfrac{\sin x}{\cos x} \ u(x) \ = \ \dfrac{x^2 \cos x}{\frac{1}{8} \ + \ x^3} & \left(0 \ < \ x \ < \ \dfrac{\pi}{2}\right) \\ u(0) \ = \ 1 & . \end{cases}$$

Aufgabe 5: Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ konvergiert die Reihe

(1,75)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} \qquad ?$$

Aufgabe 6: Gegeben seien die Geraden im $\mathbb{R}^4$

(3)

$$g_1 : \underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \qquad ,$$

$$g_2 : \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s \in \mathbb{R}) \qquad .$$

Man bestimme die Punkte $\underline{v} \in g_1$ und $\underline{w} \in g_2$ mit

$$\| \underline{v} - \underline{w} \| = \min_{\underline{x} \in g_1,\ \underline{y} \in g_2} \| \underline{x} - \underline{y} \| \quad .$$

Aufgabe 7:

a.) Man bestimme alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

b.) Man bestimme eine invertierbare Matrix S und eine Diagonalmatrix D mit

$$S^{-1} AS = D \, .$$
