

Teil A

Höhere Mathematik I + II

---

**Aufgabe 1:** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch

$$(1,5) \quad f(x) := \begin{cases} 2(x - |x|) & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{für } 2 \leq x < 4 \\ 4(e^{x-4} - 1) & \text{für } x \geq 4 \end{cases} .$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit „ja“ oder mit „nein“  
(eine Begründung ist nicht erforderlich):

- (a) Ist  $f$  in  $x = 0$  differenzierbar ?
- (b) Ist  $f$  über  $[-4, 8]$  Riemann-integrierbar ?
- (c) Ist  $f$  auf  $[-4, 8]$  stückweise stetig ?
- (d) Ist  $(f(x))^2$  in  $x = 0$  differenzierbar ?
- (e) Gilt  $f'_{++}(4) = f'_{--}(4)$  ?
- (f) Existiert  $f'(2)$  ?

**Zur Bewertung von Aufgabe 1:**

Für jede richtige Antwort gibt es 0,25 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,25 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

---

**Aufgabe 2:** Man berechne

$$(1,5) \quad (a) \quad I(a) = \int_0^1 \frac{1 - e^{ax}}{1 + e^{ax}} dx \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} ;$$

$$(1) \quad (b) \quad \int \frac{dx}{\cosh x} \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

---

**Aufgabe 3:** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$(2) \quad f(x) := x^7 + x^4 + 4x + 1 .$$

Man beweise, daß zu  $y = f(x)$  die Umkehrfunktion  $x = g(y)$  existiert  
und berechne die Zahlenwerte  $g(7)$ ,  $g'(7)$ ,  $g''(7)$ .

---

**Aufgabe 4:** Gegeben sei die Riccatische Differentialgleichung

$$(3) \quad y' + y^2 = \frac{2}{x^2} \quad (0 < x < \infty) .$$

- (a) Man bestimme alle Lösungen der Gestalt  $y = \frac{c}{x}$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .
  - (b) Man bestimme eine Lösung mit  $y(1) = 1$ .
-

**Aufgabe 5:** Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz

(3) (a)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2 \arctan k)^k}$  , (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \left( \frac{1}{4\sqrt{k}} \right)$  .

(c) Für welche  $x \in \mathbb{R}$  ist die Potenzreihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} x^n$

konvergent ?

---

**Aufgabe 6:** Gegeben seien die Ebenen

(2) 
$$\begin{aligned} E_1 & : 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ E_2 & : x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß  $g := E_1 \cap E_2$  eine Gerade ist, und geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.

Unter welchem Winkel schneiden sich  $E_1$  und  $E_2$  ?

---

**Aufgabe 7:** Zeigen Sie, daß die Matrix  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -4 \\ -6 & 12 & -7 \end{pmatrix}$  invertierbar ist

(2)

und berechnen Sie  $A^{-1}$ . Welchen Wert hat die Determinante der Matrix  $B := A^{-1}A^T A$  ?

---