

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$(1,5) \quad f(x) := \begin{cases} 2(x - |x|) & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 4x + 4 & \text{für } 2 \leq x < 4 \\ 4(e^{x-4} - 1) & \text{für } x \geq 4 \end{cases} .$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit „ja“ oder mit „nein“
(eine Begründung ist nicht erforderlich):

- (a) Ist f in $x = 0$ differenzierbar ?
- (b) Ist f über $[-4, 8]$ Riemann-integrierbar ?
- (c) Ist f auf $[-4, 8]$ stückweise stetig ?
- (d) Ist $(f(x))^2$ in $x = 0$ differenzierbar ?
- (e) Gilt $f'_{++}(4) = f'_{--}(4)$?
- (f) Existiert $f'(2)$?

Zur Bewertung von Aufgabe 1:

Für jede richtige Antwort gibt es 0,25 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,25 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 2: Man berechne

$$(1,5) \quad (a) \quad I(a) = \int_0^1 \frac{1 - e^{ax}}{1 + e^{ax}} dx \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R} ;$$

$$(1) \quad (b) \quad \int \frac{dx}{\cosh x} \quad (x \in \mathbb{R}) .$$

Aufgabe 3: Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$(2) \quad f(x) := x^7 + x^4 + 4x + 1 .$$

Man beweise, daß zu $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$ existiert
und berechne die Zahlenwerte $g(7)$, $g'(7)$, $g''(7)$.

Aufgabe 4: Gegeben sei die Riccatische Differentialgleichung

$$(3) \quad y' + y^2 = \frac{2}{x^2} \quad (0 < x < \infty) .$$

- (a) Man bestimme alle Lösungen der Gestalt $y = \frac{c}{x}$ mit $c \in \mathbb{R}$.
 - (b) Man bestimme eine Lösung mit $y(1) = 1$.
-

b i t t e w e n d e n !

Aufgabe 5: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz

(3) (a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{(2 \arctan k)^k}$, (b) $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{1}{4\sqrt{k}} \right)$.

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n} x^n$

konvergent ?

Aufgabe 6: Gegeben seien die Ebenen

(2)
$$\begin{aligned} E_1 &: 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 13 \\ E_2 &: x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 . \end{aligned}$$

Zeigen Sie, daß $g := E_1 \cap E_2$ eine Gerade ist, und geben Sie eine Parameterdarstellung dieser Geraden an.

Unter welchem Winkel schneiden sich E_1 und E_2 ?

Aufgabe 7: Zeigen Sie, daß die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -4 \\ -6 & 12 & -7 \end{pmatrix}$ invertierbar ist

(2)

und berechnen Sie A^{-1} . Welchen Wert hat die Determinante der Matrix $B := A^{-1}A^T A$?
