Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1999

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f : \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ mit

(2,5)

$$f(x) = \begin{cases} 2\sin\left(\dfrac{x^2}{\frac{\pi}{2}\sin x}\right) & \text{für } 0 < |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{für } x = 0 \quad . \end{cases}$$

Man beweise, daß f in $x_0 = 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ so bestimmt, daß für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ gilt:
$|\, x - x_0 \,| < \delta \;\Rightarrow\; |\, f(x) - f(x_0)\,| < \varepsilon$.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(2,75)

$$f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{für } x \le -1 \\ (x+1)^2 & \text{für } |x| < 1 \\ 1 & \text{für } x = 1 \\ x^2 - 2x + 4 & \text{für } x > 1 \quad . \end{cases}$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja“** oder mit **„Nein“** (eine Begründung ist nicht erforderlich) :

(a) Ist f in $x = -1$ differenzierbar ?
(b) Ist f in $x = 1$ stetig ?
(c) Besitzt f in $x = 1$ einen Grenzwert ?
(d) Ist f gleichmäßig stetig in $(-\infty, 0)$?
(e) Existiert die rechtseitige Ableitung $f'_+(1)$?
(f) Gilt für die linksseitige Neigung $f'_{--}(-1) = 0$?
(g) Ist f über $[0, 2]$ Riemann–integrierbar ?
(h) Existiert die rechtseitige Neigung $f'_{++}(1)$?
(i) Ist f gleichmäßig stetig in $(1, \infty)$?
(k) Besitzt f genau zwei Fixpunkte ?
(l) Ist f konvex auf $(1, \infty)$?

Zur Bewertung von Aufgabe 2:
Für jede richtige Antwort gibt es 0,25 Punkte, jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,25 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 3: Man berechne:

(1)

$$\int_1^4 \frac{x-1}{x+\sqrt{x}}\, dx \quad .$$

---

b i t t e   w e n d e n !!

Aufgabe 4: Man untersuche auf Konvergenz und Divergenz:

(2)

$$\textbf{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) \quad , \qquad \textbf{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi + \frac{1}{n}\right) \quad .$$

Aufgabe 5: Mit Hilfe der Taylorschen Formel beweise man:

(3)

$$\big| \log(1+x) - \sin x \big| \leq 3x^2 \qquad \left(|x| \leq \frac{1}{2} \right) .$$

Aufgabe 6:

(1,75)

a) Man beweise, daß die beiden Ebenen

$$E_1 : x + 2y + 3z = 1 \,,$$
$$E_2 : \underline{x} = (x,y,z) = \lambda \cdot (2,-1,0) + \mu\,(0,3-2)$$

nicht zusammenfallen .

b) Man berechne den Schnittpunkt von

$$g : \underline{x} = (x,y,z) = (2,2,-2) + t(-1,-2,2) \,, \quad t \in \mathbb{R} \,,$$

mit E_1 bzw. E_2 .

c) Man berechne den Abstand d zwischen E_1 und E_2 .

Aufgabe 7: Man beweise, daß $u = x \log x \;\; (x > 0)$ eine Lösung der Differentialgleichung

(3)

$$x^2u'' - xu' + u = 0 \qquad (x > 0)$$

ist und bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$x^2u'' - xu' + u = x^3 \qquad (x > 0) \,.$$
