Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2000

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Beweisen Sie, daß die Funktion

(7)

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) := (x+1)\, e^{-x}$$

auf $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angeben, daß gilt:

$$x_1, x_2 \in [0,\infty) \ \wedge\ \left|x_1 - x_2\right| < \delta \ \Rightarrow\ \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \varepsilon\ .$$

Aufgabe 2: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz

(4) + (5)

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$; **(b)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log \frac{x}{n}} \qquad (0 < x < 1)$.

Aufgabe 3: Man bestimme alle Lösungen des Gleichungssystems

(8)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & -1 \end{array} \ .$$

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(5)

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{7x - 3} & \text{für } x \geq 1 \\ -2x^2 + 4 & \text{für } x < 1 \end{cases} \ .$$

Berechnen Sie $f'_+(1)$, $f'_-(1)$ mit Hilfe der Definition. Ist f in $x = 1$ differenzierbar (Begründung) ?

Aufgabe 5: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(6)

$$f(x) = 1 + x - x^3 + x^5\ .$$

Man beweise, daß zu $y = f(x)$ auf $\mathbb{R}$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$ existiert und berechne die Zahlenwerte $g(2)$, $g'(2)$, $g''(2)$.

Aufgabe 6: Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte von $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

(10)

$$f(x) = e^{-2x}\ \sin^2 x\ .$$

---

b i t t e w e n d e n !!

Aufgabe 7: Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(7)

$$f(x) = \int_0^x \log\left(\cos^2 t + 1\right)\, dt \; .$$

Mit Hilfe der Taylorschen Formel beweise man:

$$\left| \, f(x) - x \log 2 \, \right| \leq \frac{1}{2} x^2 \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right) \; .$$

Aufgabe 8: Man berechne

(3) + (4)

(a) $$\int \frac{e^{3x}(e^{4x} - 1)}{e^{2x} + 1}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R}) \; ,$$

(b) $$\int_0^1 \log\, (x^2 + 1)\; dx \; .$$

Aufgabe 9: Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

(11)

$$u'' + 4u = 48 \sin 2x \cdot \cos 2x \quad (x > 0) \; , \qquad u(0) = u'(0) = 4 \; .$$
