Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2001

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:
(8)

$$(2n)! \ < \ (n!)^2 \cdot 4^{n-1} \qquad (n = 5, 6, 7, \ldots) \ .$$

Aufgabe 2: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:
(3)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - n^2}{\left(\log 8\right)^{2n}} \ .$$

Aufgabe 3: **(a)** Man bestimme den Konvergenzradius R der Potenzreihe
(6)

$$f(x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \, x^n \ .$$

(b) Man gebe für $f'(x)$ in $-R < x < R$ eine geschlossene Darstellung an.

(c) Mit Hilfe von **(b)** gebe man für $f(x)$ eine geschlossene Darstellung an.

Aufgabe 4: Berechnen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems $A\underline{x} = \underline{b}$ mit
(6)

$$A \ = \ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 6 & 8 \\ 6 & -6 & 12 & 10 \\ 12 & -14 & 24 & 26 \end{pmatrix} , \qquad \underline{x} \ = \ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} ,$$

$$\underline{b} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Aufgabe 5: Gegeben sei die Funktion $f : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
(8)

$$f(x) \ = \ \begin{cases} 1 \ + \ \left(7 + \sin\sqrt{|x|}\right) x \ - \ x^2 \cos\dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \ , \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \ . \end{cases}$$

Man beweise, daß $f'(0) = 7$ ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ angibt mit:

$$0 \ < \ |x - 0| \ < \ \delta(\varepsilon) \ \Longrightarrow \ \left| \frac{f(x) - f(0)}{x \ - \ 0} \ - \ 7 \right| \ < \ \varepsilon \ .$$

---

b i t t e w e n d e n !!!

Aufgabe 6: Es sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := \begin{cases} 5 - 6x + 3x^2 & \text{für } x < 2 \\ \sqrt{3x-2} & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$.
(7)

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **„Ja“** oder mit **„Nein“** (Eine Begründung ist nicht erforderlich):

(a) Ist f auf $[3, 100]$ strikt konvex ?

(b) Ist f auf $[2, \infty)$ gleichmäßig stetig ?

(c) Existiert $f'_-(2)$?

(d) Gilt $f'_+(2) = 6$?

(e) Ist f in $x = 2$ differenzierbar ?

(f) Gilt $f'_{++}(2) = f'_+(2)$?

(g) Gilt $f'_{--}(2) = 6$?

Zur Bewertung von Aufgabe 6:

Für jede richtige Antwort gibt es 1 Punkt; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 1 Punkt, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 7: Man berechne
(8)

(a) $\displaystyle\int e^{\sqrt{3x-1}}\, dx \quad \left(x \geq \frac{1}{3}\right)$, **(b)** $\displaystyle\int_0^{e - \frac{1}{e}} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2+4}}$.

Aufgabe 8: Vorgelegt sei das Anfangswertproblem
(11)

$$\begin{cases} (*) \quad e^{2x}u'(x) + e^x(e^x+2)\, u(x) = 1 + e^{2x}u^2(x) , \qquad x \geq 0 , \\ u(0) = \dfrac{3}{2} \quad . \end{cases}$$

(a) Man beweise, daß es eine partikuläre Lösung $u(x) = e^{\alpha x}$ mit einem geeigneten $\alpha \in \mathbb{R}$ von $(*)$ gibt.

(b) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 9: Gegeben sei die Fläche $\mathcal{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ z = \frac{1}{4}\, x^2 + \frac{1}{8}\, y^2 ,\ x^2 + y^2 \leq 25\right\}$.
(7)

Man beweise:

Es gibt genau eine Tangentialebene E an $\mathcal{F}$, welche auf $\underline{\nu} = (1, 1, 1)$ senkrecht steht. Man bestimme den Abstand d des Nullpunktes von E .

Aufgabe 10: Man bestimme die Länge einer Windung der logarithmischen Spirale
(6)

$$r(\varphi) = e^{-2\varphi} , \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi .$$
