Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2003

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:

(7)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \; > \; \frac{1}{3}\, n^3 \; + \; n \qquad (n \; = \; 2, 3, 4, ...) \; .$$

Aufgabe 2: Man zeige, daß die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

(6)
$$a_n \; = \; \frac{(-1)^{n+1} \; + \; \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \; - \; \cos(n\pi)}$$

konvergent mit dem Grenzwert $a = 1$ ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ so bestimmt, daß $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(\varepsilon)$ ausfällt.

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(2) **(a)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n!)}$,

(3) **(b)** $\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \log(n!)}$,

(3) **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)}$.

Aufgabe 4:

(2) **(a)** Man beweise, daß die Vektoren

$$\underline{a} \; = \; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} \; = \; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} , \quad \underline{c} \; = \; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ linear unabhängig sind.

(4) **(b)** Man stelle $\underline{d} \; = \; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ dar.

Aufgabe 5: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) \; := \; \cos x \; - \; \cos(2x) \; + \; 2 \; \cos^3 x \; , \qquad 0 \; < \; x \; < \; \pi \; .$$

(4) **(a)** Man zeige: zu $y = f(x)$ existiert in $0 < x < \pi$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$.

(4) **(b)** Man berechne die Zahlenwerte $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$.

---

b i t t e   w e n d e n !!!

Aufgabe 6: Man beweise: $\quad 2\ \log\cosh x \ > \ x \cdot \tanh x \qquad (x \neq 0)$.

(8) **Hinweis:** Es mag nützlich sein, die Funktion

$$f(x) \ := \ 2\ \log\cosh x \ - \ x \cdot \tanh x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

auf strikte Konvexität zu untersuchen.

Aufgabe 7: Man berechne:

(4) **(a)** $$\int\limits_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x(1 \ + \ \sqrt{x})}} \ ,$$

(6) **(b)** $$\int\limits_{-3}^{-2} \frac{4\ dx}{(x-1)\ (x+1)^2} \ .$$

Aufgabe 8: Man bestimme die Lösung der Differentialgleichung

(8)
$$u' \ = \ \frac{\tan u}{1 + \tan^2 u} \cdot \frac{\sin x}{4} \ , \qquad x \in \mathbb{R} \ ,$$

mit $\quad u(0) \ = \ \dfrac{\pi}{4}$

und zeige, daß

$$0 \ < \ u(x) \ < \ \frac{\pi}{2} \qquad \text{für } \ x \in \mathbb{R}$$

gilt.

Aufgabe 9: Es sei $a > 0$, $A > 0$ und

$$I(a, A) \ = \ \int\limits_a^A \frac{\log x}{\sqrt{x}} \ dx \ .$$

(3) **(a)** Man berechne den Zahlenwert $I(a, A)$ für $a > 0$, $A > 0$.

(3) **(b)** Man berechne für festes $A > 0$

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} I(a, A) \ = \ \int\limits_0^A \frac{\log x}{\sqrt{x}} \ dx \ .$$

(3) **(c)** Man zeige: für festes $a \in (0, 1]$ und $A \geq e^3$ gilt $I(a, A) \geq 2\sqrt{A}$ und damit

$$\int\limits_a^\infty \frac{\log x}{\sqrt{x}} \ dx \ = \ \infty \ .$$
