Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frührjahr 1996

Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(2) $11^n + 5^n + 4$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 2: Gegeben sei die Zahlenfolge $\{a_n\}$ mit

(2)
$$a_n = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{\sin n}{n^2}\right) & \text{für} \quad n = 4, 6, 8, ... \\ 1 + \dfrac{4}{n^2} & \text{sonst} \end{cases} .$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ bestimme man eine Zahl $N(\varepsilon) > 0$ mit

$$n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |a_n - 1| < \varepsilon .$$

Aufgabe 3: Man berechne

(1)
$$\int \sin(\log x)\, dx \qquad (x > 0) .$$

Aufgabe 4: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

(2)
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k!} \left(\frac{2^k}{k!} + \frac{1}{2^k}\right) x^k$$

konvergiert.

Aufgabe 5: Es seien sechs beliebige Zahlen $a_1, a_2, ..., a_6 \in \mathbb{R}$ gegeben.
Bestimmen Sie alle Lösungen des Gleichungssystems

(2)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 5 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = 0 .$$

Aufgabe 6: Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2,5)

a.) Man berechne A^{-1}.

b.) Man berechne alle Eigenwerte von A.

c.) Man beweise, daß jeder Eigenvektor der gegebenen Matrix A auch Eigenvektor von $(A^{-1})^2 = A^{-1} \cdot A^{-1}$ ist.

---

7. Aufgabe: Gegeben seien das Vektorfeld

(2)

$$\underline{a}\,(x, y, z) = (2ye^z, \; -2x + 3z \;,\; ye^z) \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

und die Fläche

$$F = \big\{(x,y,z) \;\big|\; (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \; z \geq 0 \;,\; x^2 + y^2 + z = 4\big\} \; .$$

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechne man

$$\iint\limits_F (\text{rot } \underline{a} \;, \underline{n}) \; do$$

($\underline{n}$ = Normale von F mit negativer z–Komponente).

---

8. Aufgabe: Man löse das Anfangswertproblem

(3, 5)

$$\begin{aligned} u''(x) - 8u'(x) + 16u(x) &= \frac{e^{4x}}{x^2+1} \;, \quad x > 0 \;, \\ u(0) &= 1 \;, \\ u'(0) &= 1 \;. \end{aligned}$$

---

9. Aufgabe: Gegeben seien die Funktionen

(4)

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4z} \qquad \text{und} \qquad g(z) = \cosh \frac{1}{z+2}$$

in $\mathbb{C} \setminus \{-4, \; -2, \; 0\}$ sowie

$$s(z) = f(z) + g(z) \qquad \text{und} \qquad p(z) = f(z) \cdot g(z) \; .$$

Außerdem sei $R_1 = \{z \in \mathbb{C} \; : \; 0 < |z+2| < 2\}$

und $R_2 = \{z \in \mathbb{C} \; : \; 2 < |z+2| < \infty\}$.

1.) Man bestimme die Laurent–Reihen von $s(z)$ in R_1 und R_2.

2.) Man berechne $\displaystyle\oint_{|\zeta|=1} (z+2)\; p(z)\; dz$.
