Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 1997

Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ und

(2,5)
$$f(x) \ = \ x^n \ - \ 6(n-1)\,!\,x \ + \ n\,! \qquad (x \in \mathbb{R})\ .$$

a.) Beweisen Sie, daß f in $\left[0\ ,\ \frac{n}{e}\right]$ wenigstens eine Nullstelle besitzt.

b.) Beweisen Sie, daß f in $\mathbb{R} \setminus \left[0\ ,\ \frac{n}{e}\right]$ mindestens eine weitere Nullstelle besitzt.

Hinweis: Die Ungleichung $e^x > \dfrac{x^n}{n!}$ $(x > 0)$ mag nützlich sein.

Aufgabe 2: Man berechne

(2)

a.) $$\int \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\,dx \qquad (x \ > \ 1)\ ;$$

b.) $$\int\limits_0^{1/2} \frac{x^3 dx}{x^3 - x^2 - x + 1} \quad .$$

Aufgabe 3: Untersuchen Sie

(1,5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(2n+1)\ (n+2)}$$

auf Konvergenz bzw. Divergenz.

Aufgabe 4: Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche

(2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{7n \ + \ \log n}}{\sqrt[3]{n} \ \cdot \ 8^{7n}}\ x^{7n}$$

konvergiert.

Aufgabe 5: Gegeben sei das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

(1,5) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} , \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \quad .$$

a.) Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die $A\underline{x} = \underline{b}$ nicht lösbar ist.
b.) Man bestimme alle $t \in \mathbb{R}$, für die $A\underline{x} = \underline{b}$ unendlich viele Lösungen besitzt.
c.) Gibt es $t \in \mathbb{R}$ so, daß $A\underline{x} = \underline{b}$ eindeutig lösbar ist ? (Begründung !)

Aufgabe 6: Gegeben sei das Vektorfeld

(1,5) $$\underline{f} = \underline{f}(x, y, z) = |x + y + z| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; .$$

a.) Man entscheide, ob das Kurvenintegral

$$I(\mathcal{C}) = \int_C \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}$$

im $\mathbb{R}^3$ vom Wege unabhängig ist.

b.) Man berechne $I(\mathcal{C})$ für

$$\mathcal{C} : x = e^t , \quad y = \frac{1}{2}\, e^{-t} , \quad z = \frac{1}{2}\, e^{-t} , \quad 0 \leq t \leq 1 \quad .$$

Aufgabe 7: Gegeben sei das Gebiet

(3) $$G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x^2 + y^2 < 1 \, , \, x^2 + y^2 + z^2 < 2 \right\}$$

und das Vektorfeld

$$\underline{f} = \underline{f}(x, y, z) = \left(xz - y^2 \, , \, xy - z^2 \, , \, yz - x^2 \right) \; .$$

Mit Hilfe des Gaußschen Satzes berechne man

$$I := \iiint_G \operatorname{div} \underline{f} \; dx \; dy \; dz \; ,$$

indem man das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umwandelt und dieses berechnet.

Aufgabe 8: Man bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

(2) $$\frac{1}{\log x}\, y - x\, \frac{\cos x}{\log x} + x y' = 0 \qquad (x > 1) \; .$$

Hinweis: Die Differentialgleichung besitzt einen Multiplikator $\mu = \mu(x)$.

Aufgabe 9: Die Funktionen f, g, h seien 2π–periodisch, und es sei

(2)

$$f(x) = x^2 \ (-\pi < x \leq \pi) \, , \qquad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für} \quad \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases} \, ,$$

$$h(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \, , \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \, . \end{cases}$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit **"‘Ja"’** oder mit **"‘Nein"’** (eine Begründung ist nicht erforderlich):

a:) Ist $h(x)$ stückweise stetig auf $\mathbb{R}$?
b:) Ist $h(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
c:) Ist $g(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
d:) Ist $f(x) \cdot h(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
e:) Ist $g(x) \cdot h(x)$ stückweise glatt auf $\mathbb{R}$?
f:) Konvergiert die von $f \cdot g$ erzeugte Fourierreihe in $[0, \pi]$ gleichmäßig ?
g:) Besitzt die von $f \cdot g$ erzeugte Fourierreihe nur Sinus–Glieder ?
h:) Besitzt die von $f \cdot g$ erzeugte Fourierreihe an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ den Wert $\frac{\pi^2}{8}$?

Zur Bewertung von Aufgabe 4:
Für jede richtige Antwort gibt es 0,25 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,25 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 10: Man berechne

(1)

$$\oint\limits_{|z-1|=5} \exp\left\{\frac{1}{z - ia}\right\} \cdot \exp\left\{\frac{-1}{(z - ia)^2}\right\} dz$$

für $a \in \mathbb{R}$ mit $-5 < a < 5$.

Aufgabe 11: Dem Zufallsvariablenpaar (X, Y) mit $X \in \{2, -1\}$ und $Y \in \{1, -\frac{1}{2}, -1\}$

(2) werden 6 Wahrscheinlichkeiten nach folgenden Schema zugeordnet:

$X \backslash Y$	$Y = 1$	$Y = -\frac{1}{2}$	$Y = -1$	
$X = 2$	$\frac{6}{37}$	0	$\frac{6}{37}$	$P(X = 2) = \frac{12}{37}$
$X = -1$	$\frac{12}{37}$	$\frac{1}{37}$	$\frac{12}{37}$	$P(X = -1) = ?$
	$P(Y = 1) = \frac{18}{37}$	$P\big(Y = -\frac{1}{2}\big) = ?$	$P(Y = -1) = ?$	

a) Man berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Produktvariable $X \cdot Y$.
b) Durch Berechnung der Erwartungswerte von X, Y und $X \cdot Y$ zeige man, daß X und Y nicht stochastisch unabhängig sind.
