Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frührjahr 1999
Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: (2,5) Man beweise durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt

$$\frac{4^n}{n+1} < \binom{2n}{n} .$$

Bemerkung: Für $k,\ n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\ (n-k)!}$

Aufgabe 2: (2) Man berechne

$$\int\limits_1^2 \frac{8x}{4x^2 - 12x + 5}\, dx .$$

Aufgabe 3: (1,5) Man beweise, daß die Gleichung $5(\log x)^4 - 8(\log x)^3 + \log x + 1 = 0$ mindestens eine Lösung x in $(0,3)$ besitzt.

Aufgabe 4: (2) **(a)** Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum \frac{(2n)\,!}{(3n)^n \cdot n\,!}$$

(b) Man bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha + \frac{1}{n}\right)^n$ konvergiert .

Aufgabe 5: (3,5) Gegeben sei das Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Man beantworte folgende Fragen entweder mit „**ja**“ oder mit „**nein**“
(eine Begründung ist nicht erforderlich):

(a) Ist das Gleichungssystem lösbar ?
(b) Ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar ?
(c) Ist Rang $A = 3$?
(d) Gilt für die Unbekannte x_2 : $x_2 = 1$?
(e) Gilt für die Unbekannte x_1 : $x_1 = 3$?
(f) Gilt $-x_4 + x_5 = 1$?
(g) Kann man die Unbekannte x_3 willkürlich wählen ?

Zur Bewertung von Aufgabe 5:
Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 0,5 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

---

b i t t e w e n d e n !

Aufgabe 6: Man bestimme alle lokalen Extremwerte und alle Sattelpunkte von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

(1,5)
$$f(x,y) \;=\; 2x^3 \;-\; y^3 \;-\; 6x^2 \;+\; 6y^2 \;.$$

Aufgabe 7: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(1,5)
$$\int_0^\infty \frac{\log\,(1+\sinh x)}{x\;(1+x^2)}\;dx \;.$$

Hinweis: Man beachte $\sinh x \;=\; \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \;>\; 0$ für $x > 0$

und $\cosh x \;=\; \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \;>\; 1$ für $x > 0$.

Aufgabe 8: Man berechne das Kurvenintegral

(2,5)
$$I(\Gamma) \;:=\; \int_\Gamma (-xy - y)\;dx \;+\; (2xy - y)\;dy \;,$$

wobei Γ die Kurve ist, welche $(0,0)$ mit $(2,1)$ verbindet, und zwar

(i) längs der Geraden $x \;=\; 2y$,

(ii) längs der Parabel $x^2 \;=\; 4y$.

Ist $I(\Gamma)$ im $\mathbb{R}^2$ vom Wege unabhängig (Begründung) ?

Aufgabe 9: Man zeige, daß

(2)
$$f(z) \;=\; \frac{z}{\cosh z \;-\; 1} \qquad (z \neq 2k\pi i \;,\; k \text{ ganz})$$

in $z = 0$ einen Pol 1. Ordnung besitzt, und berechne $\displaystyle\oint_{|z|=1} f(z)\;dz$.

Aufgabe 10: Sei $h \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(2)
$$f(x) \;:=\; \begin{cases} \frac{h}{2}\,(x+1) & , \quad -1 \;\le\; x \;<\; 1 \\ h & , \quad 1 \;\le\; x \;<\; 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) Bestimmen Sie $h \in \mathbb{R}$ so, daß f eine Wahrscheinlichkeitsdichte ist.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Streuung einer Zufallsvariablen X mit der im Teil a) bestimmten Dichte f .
