Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 1997

Höhere Mathematik I, II, III, IV

---

1. Aufgabe: Sei $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2 - \dfrac{1}{x}$.

(2,25) Man beweise, daß für jedes $M > 1$ die Funktion f auf $[1, M]$ gleichmäßig stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angibt, daß für alle $x, y \in [1, M]$ gilt:

$$|x - y| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \bigl|f(x) - f(y)\bigr| < \varepsilon .$$

---

2. Aufgabe: Man beweise, daß die durch

(2,5)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \qquad f(x) := \sinh\,(x^3 - 3x^2 + 3x - 2)$$

definierte Funktion f eine Umkehrfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ besitzt und bestimme die Zahlenwerte $g(0)$, $g'(0)$, $g''(0)$.

---

3. Aufgabe: Man berechne

(1,5)
$$\int_0^{\pi/2} \frac{(2\sin x + 5)\cos x}{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}\, dx \quad .$$

---

4. Aufgabe: Für welche $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ konvergiert die Reihe

(1,75)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} \qquad ?$$

---

5. Aufgabe: Man bestimme alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

(2)
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

---

6. Aufgabe: Gegeben seien die Kugel

(2,5)

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und die Ebene

$$E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x + y\} \quad .$$

Sei C die Schnittkurve von K und E, also $C := K \cap E$, so orientiert, daß sie vom Punkte $(0,0,1)$ aus gesehen positiv orientiert erscheint.

Berechnen Sie das Kurvenintegral $I = \int\limits_C \underline{f} \cdot d\underline{x}$ mit dem Vektorfeld

$$\underline{f}(x,y,z) := \left(-y^2 + z^2 \ , \ x^2 - z^2 \ , \ x^2 - y^2 - y\right) \ ,$$

indem Sie I mittels des Stokesschen Integralsatzes in ein Flächenintegral überführen, und dieses auswerten.

---

7. Aufgabe: Es sei f die auf $\mathbb{R}$ 2π–period. Funktion, welche für $|x| \leq \pi$ durch $f(x) = |\sin x|$ definiert ist. Man entwickle f in eine Fourierreihe und zeige

(2,5)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1} = \frac{1}{2} \quad .$$

---

8. Aufgabe:

(2)

a.) Man bestimme diejenige linear gebrochene Abbildung

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \quad \text{die die Punkte } z_1 = 1 \ , \ z_2 = i \ , \ z_3 = -1$$

der Reihe nach in die Punkte $w_1 = 2 + i$, $w_2 = 1$, $w_3 = i$ überführt.

b.) Auf welches Gebiet wird die obere Halbebene $\{z : z \in \mathbb{C} \ , \ \mathrm{Im}\ z > 0\}$ durch die im Teil a.) ermittelte Abbildung

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{abgebildet ?} \quad \text{(Begründung !)}$$

---

9. Aufgabe: Man beweise:

(3)

$$a := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z|=1} \sinh\,(z + 1/z)\; dz$$

ist eine reelle Zahl mit $1 < a < e - 1$.

Hinweis: — Residuensatz — $\sinh\zeta = \frac{1}{2}\left(e^{\zeta} - e^{-\zeta}\right)$

---

10. Aufgabe: Man bestimme die Lösung $u(x,y)$ der Dirichletschen Randwertaufgabe

(1)

$$\begin{cases} \Delta_2\, u := u_{xx} + u_{yy} = 0 & (x^2 + y^2 < 1) \ , \\ u(x,y)\,\Big|_{x^2+y^2=1} = v(\rho,\vartheta)\,\Big|_{\rho=1} = 4\cos^2\vartheta & . \end{cases}$$
