Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2000

Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: Beweisen Sie, daß die Funktion

(7)

$$f : [0,\infty) \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f(x) := (x+1)\, e^{-x}$$

auf $[0,\infty)$ gleichmäßig stetig ist, indem Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so angeben, daß gilt:

$$x_1, x_2 \in [0,\infty) \ \wedge \ \big|x_1 - x_2\big| < \delta \ \Rightarrow \ \big|f(x_1) - f(x_2)\big| < \varepsilon \ .$$

Aufgabe 2: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz

(5)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log \frac{x}{n}} \qquad (0 < x < 1) \ .$$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(5)

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{7x - 3} & \text{für } x \geq 1 \\ -2x^2 + 4 & \text{für } x < 1 \end{cases} \ .$$

Berechnen Sie $f'_+(1)$, $f'_-(1)$ mit Hilfe der Definition. Ist f in $x = 1$ differenzierbar (Begründung) ?

Aufgabe 4: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(6)

$$f(x) = 1 + x - x^3 + x^5 \ .$$

Man beweise, daß zu $y = f(x)$ auf $\mathbb{R}$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$ existiert und berechne die Zahlenwerte $g(2)$, $g'(2)$, $g''(2)$.

Aufgabe 5: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(7)

$$f(x) = \int_0^x \log\big(\cos^2 t + 1\big)\, dt \ .$$

Mit Hilfe der Taylorschen Formel beweise man:

$$\big| \, f(x) - x \log 2 \, \big| \leq \frac{1}{2}\, x^2 \qquad \big(x \in \mathbb{R}\big) \ .$$

Aufgabe 6: Man berechne

(3)

$$\int \frac{e^{3x}(e^{4x} - 1)}{e^{2x} + 1}\, dx \qquad (x \in \mathbb{R}) \ .$$

Aufgabe 7: Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

(11)

$$u'' + 4u = 48 \, \sin 2x \cdot \cos 2x \quad (x > 0) \ , \qquad u(0) = u'(0) = 4 \ .$$

---

b i t t e   w e n d e n !!

Aufgabe 8: Betrachtet wird das Kurvenintegral

(8)

$$I(\Gamma) = \int\limits_{\Gamma} \frac{\alpha x + \beta y}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \frac{\alpha y - \beta x}{(x^2+y^2)^2}\,dy$$

im Gebiet $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2+y^2 > 0\}$ mit zwei reellen Konstanten α, β.

(a) Man berechne $I(\Gamma)$ für $\Gamma = \Gamma_0 : \; x = \cos t, \; y = \sin t, \; 0 \le t \le 2\pi$.

(b) Für welche Wahl von $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $I(\Gamma)$ in G vom Wege unabhängig ?

(c) Es seien nun $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß $I(\Gamma)$ in G vom Wege unabhängig ist. Dann berechne man $I(\Gamma)$, wenn $\Gamma = \Gamma_1$ die logarithmische Spirale

$$\Gamma_1 : \; r = e^{5\varphi} \; , \quad 0 \le \varphi \le 4\pi \; ,$$

ist (r, φ–Polarkoordinaten: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$) .

Aufgabe 9: Gegeben seien

(14)

$$G = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + 2z < 9 \, , \; z > 4\}$$

und das Vektorfeld $\underline{f} : \; G \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\underline{f}(x,y,z) = e^{9-2z} \left(2x + y \; \sin^2(z^2) \; , \; 2y - x + x \; \cos^2(z^2) \; , \; 4z\right) .$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Satzes

$$\iiint\limits_{G} \operatorname{div} \underline{f} \; dx\, dy\, dz \; ,$$

indem Sie das Volumenintegral in ein Oberflächenintegral umwandeln und dieses berechnen.

Aufgabe 10: Sei $f : \mathbb{C} \setminus \{i\} \to \mathbb{C}$ definiert durch

(8)

$$f(z) = \frac{(1+i)\,z - 2i}{z - i} \; .$$

Geben Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob Sie **wahr** oder **falsch** ist; eine Begründung ist nicht erforderlich.

(a) f besitzt genau einen Fixpunkt.

(b) Die Gerade $\{z \mid \operatorname{Im} z = 1\}$ wird durch f auf eine Gerade abgebildet.

(c) $f\Big(\{z \mid \operatorname{Re} z > 1\}\Big) = \Big\{z \;\Big|\; \big|z - \tfrac{1}{2}\,(1+i)\big| < \tfrac{1}{2}\Big\}$.

(d) $g(z) = f\big(f(z)\big)$ ist eine gebrochen–lineare Abbildung mit $D(g) = \mathbb{C} \setminus \{i\}$.

Zur Bewertung von Aufgabe 10:
Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte; jede falsche Antwort führt zu einem Abzug von 2 Punkten, soweit die Summe nicht negativ ausfällt. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe 11: Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

(11)

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{7 + 4\sin\varphi}{\sqrt{5} + 2\cos\varphi}\, d\varphi \; .$$

Aufgabe 12: Für das Eigenwertproblem

(5)

$$\begin{cases} u''(x) = \lambda^2 u(x) & (-1 \le x \le 1) \, , \\ u(1) = u(-1) \, , \; u'(1) = u'(-1) & \end{cases}$$

bestimme man alle Eigenwerte, ihre Vielfachheiten und die zugehörigen Eigenfunktionen.
