Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
RWTH

Telefon: ++49(0)241-80 94925
Fax: ++49(0)241-80 92323
Sekr.: ++49(0)241-80 94922
80 94921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2006
(90 Minuten)
Höhere Mathematik II
Wiederholungsklausur
19.09.2006

Aufgabe 1 **[6 Punkte]**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix mit paarweise verschiedenen Eigenwerten λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in \mathbb{R}$. Dann ist A diagonalisierbar.

(b) Sei $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar mit $a < b$ und $h(a) = h(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $h'(\xi) = 0$.

(c) Sei $\alpha < \beta$ und $a, b \in C[\alpha,\beta]$. Dann ist der Lösungsraum der skalaren linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung $u''(x) + a(x)\,u'(x) + b(x)\,u(x) = 0$, $x \in I = (\alpha,\beta)$, zweidimensional.

(d) Die Funktion $f(x) = \int\limits_0^{x^2} \left[\cos^4(t) + \sin^4(t)\right] dt$, $x \in \mathbb{R}$, hat eine beschränkte Ableitung.

(e) Die Menge

$$M := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$$

bildet eine Zerlegung des Intervals $[0,1]$.

(f) Für $-\infty < a < b < \infty$ ist eine stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ immer Riemann–integrierbar, aber nicht unbedingt differenzierbar.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 **[10 Punkte]**

(a) **(3 Punkte)**

Für welche $b \in \mathbb{R}$ hat

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & b & 1 \\ 10 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

drei paarweise verschiedene Eigenwerte?

(b) **(7 Punkte)**

Für welche $b \in \mathbb{R}$ ist A diagonalisierbar?

Bitte wenden !!!

Aufgabe 3 [6 Punkte]

Man beweise: $f(x) = x^3 - 3x + c$ hat für kein $c \in \mathbb{R}$ zwei verschiedene Nullstellen aus $(-1, 1)$

Aufgabe 4 [10 Punkte]

Man zeige:

$$x \leq \tan x \leq x + 2x^2 \quad \text{für alle} \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$$

Aufgabe 5 [14 Punkte]

(a) (6 Punkte)
Berechnen Sie folgendes Integral:

$$\int \frac{x + 2}{x^3 - 2x^2 + x}\, dx \ , \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$$

(b) (8 Punkte)
Existiert das folgende uneigentliche Integral

$$\int_e^\infty \frac{\cos\Big(\log(x)\Big)}{x\sqrt{\log(x)}}\, dx \ ?$$

Aufgabe 6 [8 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösungsmenge L_{inh} der Differentialgleichung

$$u'' + 6u' + 9u = x^2 , \ x \in \mathbb{R} \ .$$

Hinweis: Ansatz vom Typ der rechten Seite

Aufgabe 1

a) W

b) W

c) W

d) F

e) F

f) W

Aufgabe 2

a) · $\det(A-\lambda I) = (-3-\lambda)(b-\lambda)(2-\lambda)$ 2

· Die E.W. von A sind -3, b und 2. Also hat A für $b \in \mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$ drei verschiedene E.W. 1

b) · Für $b \in \mathbb{R}\setminus\{-3,2\}$ ist A diagonalisierbar, da in diesem Fall A drei verschiedene E.W. hat. 1

· Für $b=-3$ ist $E_{-3} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\right\}$ und somit $n_{geo}(-3)=2$. Also ist $n_{geo}(\lambda) = n_{alg}(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ und A in diesem Fall $(b=-3)$ diagonalisierbar. 3

· Für $b=2$ gilt $E_2 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ und somit $n_{geo}(2)=1$. Also ist $n_{geo}(2) \neq n_{alg}(2)$ und A damit in diesem Fall $(b=2)$ <u>nicht</u> diagonalisierbar.

3

Aufgabe 3

3

Es gilt $f'(x) = 3x^2 - 3 < 0$ auf $(-1,1)$. Also ist f streng monoton fallend auf $(-1,1)$. 1 Damit kann f höchstens <u>eine</u> Nullstelle in $(-1,1)$ haben 2

Aufgabe 4

Nach Taylorformel gilt:

$$\tan(x) = \tan(0) + \tan'(0)x + \frac{1}{2}\tan''(\xi)x^2$$ für ein ξ zwischen 0 und x.

4

Für $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ folgt:

2

$$\tan(x) = 0 + x + \frac{\sin(\xi)}{\cos^3(\xi)}x^2 \leq x + \frac{1/\sqrt{2}}{(1/\sqrt{2})^3}x^2 = x + 2x^2$$

3

Da $\tan''(\xi) > 0$ folgt weiter:

$$\tan(x) > x$$ 1

Aufgabe 5

a) • PBZ von $R(x) = \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}$:

$$R(x) = \frac{-2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x} \qquad (4)$$

• $$\int R(x)dx = -2\log(|x-1|) - \frac{3}{(x-1)} + 2\log|x| + C \qquad (2)$$

b) • $$\int_e^\infty \frac{\cos(\log(x))}{x\cdot\sqrt{\log(x)}}dx = \lim_{R\to\infty} \int_e^R \frac{\cos(\log(x))}{x\cdot\sqrt{\log(x)}}dx \qquad (1)$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_1^{\log R} \frac{\cos(y)}{\sqrt{y}} dy \qquad (3)$$

• Da $F(x) = \int_1^x \cos(y)dy = \sin(x) - \sin(1)$ beschränkt ist,
existiert das Integral $\int_1^\infty \frac{\cos(y)}{\sqrt{y}}dy$ und damit
auch

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^{\log R} \frac{\cos(y)}{\sqrt{y}} dy \qquad (4)$$

Aufgabe 6

char. Poly: $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$ ①

$\rightsquigarrow \lambda_{1,2} = -3$ ①

$\rightsquigarrow L_{hom} = \{ c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} , \; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$ ①

Ansatz partikuläre Lösung: $u_0(x) = ax^2 + bx + c$ ②

$\rightsquigarrow a = \frac{1}{9}, \; b = \frac{-12}{81}, \; c = \frac{6}{81}$ ①

$\rightsquigarrow u_0(x) = \frac{x^2}{9} - \frac{4}{27}x + \frac{2}{27}$ ①

$\rightsquigarrow L_{inh} = u_0(x) + L_{hom}$ ①