Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2004

Teil A

Höhere Mathematik I + II

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:
(6)

$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > 1 \qquad (n \in \mathbb{N}) \ .$$

Aufgabe 2: Es sei $f\colon\ (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit
(8)

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(4\sqrt{|x|}\,\right) & \text{für } -1 < x < 0 \\ \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} & \text{für } 0 \le x < 1 \ . \end{cases}$$

Man beweise, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ angibt mit

$$x \in (-1,1) \ \wedge \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \bigl|f(x) - f(x_0)\bigr| < \varepsilon \ .$$

Aufgabe 3:

(4) **(a)** Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2^n} \ .$$

(5) **(b)** Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^n$$

konvergiert.

Aufgabe 4: Gegeben sei der Punkt $P = \begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$ und die Ebene
(8)

$$E\colon\ x = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} , \qquad \lambda,\ \mu \in \mathbb{R} \ .$$

Man bestimme den Lotfußpunkt von P bezüglich E und den Abstand des Punktes P von E.

---

b i t t e w e n d e n !!!

Aufgabe 5:

(6) **(a)** Man berechne

$$I := \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2x+3}{x^2 + x + \frac{5}{4}} \, dx$$

und zeige: $0 < I < 1 + \frac{\pi}{2}$.

(5) **(b)** Man berechne

$$\int_2^3 \frac{x^2 dx}{(x^2-1)^2} \qquad \text{(partielle Integration)} .$$

Aufgabe 6: Gegeben sei die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{7} x^7 + 3x^5 - 10x^3 + 15x - \frac{71}{7} .$$

(5) **(a)** Man beweise, dass zu $y = f(x)$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$ existiert, und dass $g(y)$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

(3) **(b)** Man berechne die Zahlenwerte $g(-2)$, $g'(-2)$, $g''(-2)$.

Aufgabe 7: Man beweise mit Hilfe der Taylorformel:

(8)

$$x - \frac{3}{2} x^2 \le \frac{\log(1+x)}{1+x} \le x + x^2 \qquad (x \ge 0) .$$

Aufgabe 8: Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

(12)

$$\begin{cases} x^2 u''(x) - 2x\, u'(x) + (2-x^2)\, u(x) + x^3 = 0 , & x > 1 ; \\ u(1) = u'(1) = 1 . \end{cases}$$

Hinweis: $u(x) = x \cdot e^{\alpha x}$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$ sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung.
