Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik III
WS 1994/1995

---

1. Aufgabe: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

(3,5)
$$f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2 - 6(x+y) .$$

a.) Man berechne ihre partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b.) Man bestimme alle lokalen Maxima, lokalen Minima und Sattelpunkte von f.

c.) Besitzt f ein absolutes Minimum ? (Begründung !)

---

2. Aufgabe: Man berechne das Volumen des Körpers K, der von den Flächen

(3)
$$z = 1 + x + y \qquad \text{und} \qquad z = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{2} + y\right)^2$$

begrenzt wird und den Punkt $\left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$ enthält.

---

3. Aufgabe: Gegeben sei das Vektorfeld

(3)
$$\underline{f} = \underline{f}(x,y,z) = \log(1 + x^2 + y^2 + z^2)\ (\alpha x,\ 2y,\ 2z) , \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 .$$

a.) Für welche Wahl von $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt $\underline{f}$ ein Potential h mit $\nabla h = \underline{f}$?

b.) Man bestimme h und berechne
$$J(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} \underline{f}\ d\underline{x}$$
für $\mathcal{C} : \underline{x}(t) = (\cos t,\ \sin t,\ 2\cos t - 3\sin t)$, $0 \le t \le 3\pi$.

---

4. Aufgabe: Gegeben sei die Raumkurve $\mathcal{C}$ mit

(3,5)
$$\mathcal{C} : \begin{aligned} x &= \sin 4t \\ y &= \cos 4t \\ z &= 1 - 8\sin^2 t + 8\sin^4 t \end{aligned} \qquad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right)$$

und das Vektorfeld
$$\underline{f} = \underline{f}(x,y,z) = \left(z + 2x,\ -2x + 3z + ze^{yz},\ -2y + ye^{yz}\right) .$$

a.) Man beweise, daß $\mathcal{C}$ eine geschlossene Kurve in einer Ebene (welcher ?) ist.

b.) Man berechne $\int_{\mathcal{C}} \underline{f}\ d\underline{x}$, indem man das Kurvenintegral mit dem Stokesschen Satz in ein Flächenintegral verwandelt und dieses berechnet.

---

5. Aufgabe: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(3)
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^{3/4}} \arctan \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx .$$
