Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik III
WS 2000/2001

---

1. Aufgabe: Man beweise, daß

(15)

$$\phi(x) \; = \; \int_0^\infty e^{-y^2} \cos(2xy) \; dy \qquad (x \in \mathbb{R})$$

auf $\mathbb{R}$ eine einmal stetig differenzierbare Funktion darstellt, welche der Differentialgleichung

$$(*) \qquad \phi'(x) \; = \; -\, 2x \; \phi(x) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

genügt. Durch Integration von $(*)$ bestimme man mit Hilfe von

$$\int_0^\infty e^{-y^2} dy \; = \; \frac{1}{2} \sqrt{\pi}$$

schließlich $\phi(x)$ in integralfreier Form.

---

2. Aufgabe: Mit dem 1. Hauptsatz über Kurvenintegrale beweise man, daß

(10)

$$I(\Gamma) \; = \; \int_\Gamma |y - x| \; (dx + dy) \qquad (\Gamma \;\text{ Kurve im } \mathbb{R}^2)$$

im $\mathbb{R}^2$ vom Wege <u>abhängig</u> ist.

---

3. Aufgabe: Gegeben sei das Vektorfeld

(18)

$$\underline{f} \; = \; \frac{1}{1 \, + \, x^2 \, + \, y^2 \, + \, z^2} \; (x, y, 2z) \; , \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \; ,$$

und das Gebiet

$$G \; = \; \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^2 \, + \, y^2 \, + \, z^2 \; < \; 4 \; , \; z \; > \; 0 \right\} .$$

Man berechne

$$I \; = \; \iiint_G \text{div } \underline{f} \; dx \; dy \; dz \; ,$$

indem man I mit Hilfe des Gaußschen Satzes in ein Oberflächenintegral verwandelt und dieses berechnet.

---

b i t t e   w e n d e n   !!

4. Aufgabe: Gegeben sei das Vektorfeld
(9)

$$\underline{f} \;=\; \left(x^2+y+z \;,\; x+y^2+z \;,\; x+y+z^2\right) \;, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;,$$

und die Raumkurve

$$\Gamma:\; \underline{x}(t) \;=\; (2\;+\;3\sin t\;,\; -1\;+\;3\cos t\;,\; 4\;+\;\cos t\;+\;\sin t)\;,\; 0\le t\le 2\pi\;.$$

Man berechne: **(a)** rot $\underline{f}$; **(b)** $\oint\limits_{\Gamma} \underline{f}\; d\underline{x}$.

---

5. Aufgabe: (a) Man beweise, daß die Funktionenfolge
(18)

$$\left\{f_n\right\}_{n=1}^{\infty} \quad \text{mit} \quad f_n:\;[0,\infty)\to\mathbb{R}\;,\; f_n(x) \;=\; \frac{x}{n^2}\,e^{-\frac{x}{n}}\;,$$

auf $[0,\infty)$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ konvergiert, indem man zunächst $f(x)$ bestimmt und dann zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ so angibt, daß

$$\left|f(x) \;-\; f_n(x)\right| \;<\; \varepsilon$$

für alle $n > N(\varepsilon)$ und alle $x\in[0,\infty)$ gilt.

Hinweis: Dabei mag es nützlich sein, das Maximum von f_n zu bestimmen.

(b) Man beweise:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^{\infty} f_n(x)\;dx \;\neq\; \int\limits_0^{\infty}\lim_{n\to\infty} f_n(x)\;dx\;.$$
