Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans

Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik III
15.01.2005

Aufgabe 1 [10 Punkte] Sei

$$\Gamma(t) = \begin{cases} (2\cos(t),\ 2\sin(t),\ 1) & : \quad 0 \le t \le \pi \\ (\frac{4}{\pi}(t-\frac{3}{2}\pi),\ 0,\ 1) & : \quad \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$

eine geschlossene Kurve in $\mathbb{R}^3$ und

$$\underline{f}(x,y,z) = (z^2 e^x - 3y^3,\ 2+y,\ z^2\log(x^2+1) - \arctan(z)y^3)$$

ein Vektorfeld. Berechnen Sie mit Hilfe des Stokesschen Satzes

$$\int_\Gamma \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x}\ .$$

Aufgabe 2 [10 Punkte] Betrachten Sie die Funktion

$$F(x,y) := x^2 + x^2 y + y^2 - 3e^y.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$F(x,y) = 4$$

nach der Variablen y in einer Umgebung des Punktes $(e,2)$ auflösbar ist.
(ii) Berechnen Sie die Ableitung der durch die Gleichung $F(x,f(x)) = 4$ implizit definierten Funktion f im Punkt e.

Aufgabe 3 [10 Punkte] Betrachten Sie für $R > 0$ und $\underline{m} = (1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ die Kugel

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \le R^2\}$$

und den Kegel

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; (x-1)^2 + (y-2)^2 \le (z-3)^2\}.$$

Berechnen Sie das Volumen des Teils des Kegels, der in der Kugel B liegt.

Aufgabe 4 [15 Punkte] Gegeben sei die durch

$$f_n(x) := \frac{2n^2 x}{(n^2+x^2)^2} \text{ für } x \in \mathbb{R}$$

definierte Funktionenfolge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
(i) Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$: $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(ii) Beweisen Sie, dass die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig auf $\mathbb{R}$ konvergiert.
(iii) Zeigen Sie, dass trotz der gleichmässigen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)dx \neq \int_0^\infty f(x)dx$$

gilt.

Aufgabe 5 [9 Punkte] Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ das folgende Randwertproblem

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda^2 u(t) = 0 & \text{in } [a,b] \\ u(a) = 0 & \\ u(b) = 1 & \end{cases}$$

(i) Untersuchen Sie das Randwertproblem für $\lambda = 1$ im Intervall $[0,\pi]$ (d.h. $a = 0$, $b = \pi$) auf Lösbarkeit.