Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans

Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik III
29.01.2005

Aufgabe 1 [**10 Punkte**] Betrachten Sie das folgende Vektorfeld in $\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z) \;:=\; (-9, x, 1)$$

und die Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 9\,,\; z \;\geq\; 2 \right\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \text{rot}\, f \cdot n \; do\,,$$

wobei n die Normale an $\mathcal{F}$ mit positiver z–Komponente ist.

Aufgabe 2 [**12 Punkte**] Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f(x,y,z) \;=\; \begin{pmatrix} \cos(yz) & + & y\;\arctan(z^3) \\ -xz\;\sin(yz) & + & x\;\arctan(z^3) \\ -xy\;\sin(yz) & + & \dfrac{3xyz^2}{1+z^6} \end{pmatrix}$$

(i) Zeigen Sie, dass

$$\text{rot}\, f \;=\; 0$$

gilt.

(ii) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_{\Gamma} f \cdot dx$ über die Kurve

$$\Gamma\colon\; \gamma(t) \;:=\; \left(\frac{\log\left(t\;\sin(\frac{t}{2}) \;+\; 1\right)}{\log(\pi \;+\; 1)}\;,\;\; t/\pi\,,\;\; \frac{t^2\tan(\frac{t}{4})}{\pi^2} \right)\;, \qquad 0 \;\leq\; t \;\leq\; \pi$$

Hinweis: Sie können die Hauptsätze über Kurvenintegrale im Raum verwenden.

Aufgabe 3 [**10 Punkte**] Betrachten Sie für $R > 0$ die Kugel

$$B \;:=\; \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; (x-1)^2 \;+\; (y-2)^2 \;+\; (z-3)^2 \;\leq\; R^2 \right\}$$

und die Mantelfläche

$$K \;:=\; \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\; (x-1)^2 \;+\; (y-2)^2 \;=\; (z-3)^2 \right\}.$$

des Doppelkegels. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Mantelfläche des Doppelkegels, der in der Kugel B liegt, genauer $\mathcal{A}(K \cap B)$.

Aufgabe 4 [**12 Punkte**] Sei f die 2π–periodische Funktion, welche durch $f(x) = x$ für $-\pi \leq x < \pi$ definiert ist. Bestimmen Sie die Fourierreihe von f und berechnen Sie damit den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{1}{2n+1}\,.$$

Aufgabe 5 [**10 Punkte**] Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$2u(x)\;u'(x) \;+\; 2x \;+\; 3 \;\cdot\; \cos(u(x)) \;-\; 3x\;\sin u(x)\;u'(x) \;=\; 0 \qquad \forall\;\; x \in \mathbb{R}.$$