Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik III
und
Vordiplomsklausur Wirtschaftsingenieurwesen
27.01.2007

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Konvergiert eine Funktionenfolge gegen eine stetige Grenzfunktion, so ist die Konvergenz gleichmäßig.

(b) Für jede zweimal differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\,f(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial x}\,f(x,y) \quad \text{für alle} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,.$$

(c) Eine beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^2$, deren Rand ∂B Riemann–Maß Null hat, ist Riemann–messbar.

(d) $C[a,b] = \{\, f\colon [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist stetig}\}$ ist vollständig bezüglich der Norm $\|f\| = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

(e) Jede Funktion $f \in L^2\Big((0,2\pi)\,,\,\mathbb{R}\Big)$ hat Fourier–Koeffizienten $c_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{Z}$, mit $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$.

(f) Auf $[0,1]$ konvergieren die Polynome $P_n(t) = (1-t)^{2n}$ für $n \to \infty$ gegen eine stetige Grenzfunktion.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [8 Punkte]

Es seien $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$ und Γ eine Kurve in $\mathbb{R}^2$ die durch die Abbildung

$$\gamma\colon \left[0\,,\,\frac{\pi}{n}\right] \to \mathbb{R}^2\,,\;\; \gamma(\varphi) = \Big(a\,\sin(n\varphi)\,\cos(\varphi)\,,\; a\,\sin(n\varphi)\,\sin(\varphi)\Big)$$

parametrisiert wird.
Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes für Gebietsintegrale den Flächeninhalt des von Γ eingeschlossenen Gebiets.

Aufgabe 3 [9 Punkte]

Sei $G := \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, |x| < y < 1\Big\}$. Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\oint\limits_{\partial G} \left(\frac{8}{3}\,x^3 - 16xy^2 + e^{y^2}\right) dy + \left(\arctan\Big(x^2 + \sin(x)\Big) - 6xy^2\right) dx\,.$$

Bitte wenden!!

Aufgabe 4 [13 Punkte]

(a) (6 Punkte)

Betrachten Sie

$$F(x,y) := \sqrt{(1+x)^2 + y^2}\,\sqrt{(1-x)^2 + y^2}\ .$$

Bestimmen Sie die beiden Lösungen $y = y_1$ und $y = y_2$ der Gleichung

$$F(0,y) = 16$$

und zeigen Sie, dass F in einer Umgebung der Punkte $(0,y_1)$ und $(0,y_2)$ nach y mit Funktionen $f_i = f_i(x)$, $i = 1,2$, auflösbar ist.

(b) (4 Punkte)

Geben Sie $f_i(0)$ an und bestimmen Sie $f_i'(0)$, $i = 1,2$.

(c) (3 Punkte)

Begründen Sie, warum f_i', $i = 1,2$, in einer Umgebung von 0 stetig differenzierbar ist.

Aufgabe 5 [9 Punkte]

(a) (6 Punkte)

Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{R}$ die Fourier–Reihe der 2π–periodischen Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -k\,, & -\pi \le x < 0 \\ k\,, & 0 \le x < \pi \end{cases}\ , \qquad f(x+2\pi) = f(x)\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

(b) (3 Punkte)

Folgern Sie daraus, dass gilt:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Aufgabe 6 [9 Punkte]

Zeigen Sie, dass

$$g(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}\ , \qquad x \in \mathbb{R}$$

stetig differenzierbar ist.
