Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Ersatzanwesenheitsübung zur Höheren Mathematik III und Vordiplomsklausur Wirtschaftsingenieurwesen 09.02.2007

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Jede reguläre Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^m$ besitzt eine Parametrisierung nach der Bogenlänge.

(b) Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ eine Ergebnismenge und $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$. $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ ist ein Ergebnis.

(c) Ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ ist Riemann–meßbar, wenn das Infimum der äußeren und das Supremum der inneren Flächeninhalte von G gleich ist.

(d) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann ist jede differenzierbare Funktion $f\colon G \to \mathbb{R}$ auch stetig differenzierbar.

(e) Eine n–elementige Menge besitzt genau $(n)_k$ viele k–elementige Teilmengen, wobei $n, k \in \mathbb{N}$ und $k \leq n$.

(f) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π–periodische, auf $[0, 2\pi]$ stückweise glatte Funktion. Dann konvergiert die Fourier–Reihe $S_f(x) = \lim\limits_{N\to\infty} S_{f,N}(x)$ in jeden Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen $f(x)$.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

Aufgabe 2 [8 Punkte]

Sei $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\,,\ z > 0\right\}$ und N das Normalenvektorfeld auf S mit positiver z–Komponente, sowie $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\,,\ f(x, y, z) = (1, xz, xy)\,.$

Berechnen Sie $\int\limits_S \langle \operatorname{rot} f\,,\, N\rangle\, do$ mit dem Stokesschen Integralsatz.

Bitte wenden!!

Aufgabe 3 [12 Punkte]

(a) [8 Punkte]
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche

$$\mathcal{F} = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1\,,\ x^2 + z^2 = 1\,,\ z \geq 0\Big\}\,.$$

(b) [4 Punkte]
Sei $\Omega = Z_1 \cap Z_2 \subset \mathbb{R}^3$ der Schnitt der beiden Zylinder

$$Z_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 \leq 1\Big\} \quad \text{und} \quad Z_2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + z^2 \leq 1\Big\}\,.$$

Geben Sie eine Parametrisierung des Randes $\partial\Omega$ (= Oberfläche von Ω) an und bestimmen Sie den Flächeninhalt von $\partial\Omega$.

Aufgabe 4 [12 Punkte]

Gegeben seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und

$$f(x,y) = x \cdot y \quad \text{für} \quad x > 0\,,\ y > 0\,.$$

Bestimmen Sie das Maximum von f unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q}y^q = c$$

für eine vorgegebene Konstante $c > 0$.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass der einzige kritische Punkt, den Sie erhalten, ein Maximalpunkt ist.

Aufgabe 5 [8 Punkte]

Bestimmen Sie zur Funktionenfolge $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{n}\right)\,,\ x \in [-1,1]\,,$ die Grenzfunktion

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,.$$

Konvergiert f_n gleichmäßig?

Aufgabe 6 [8 Punkte]

Beim Lotto „4 aus 20“ werden von 20 gleichartigen Kugeln, welche von 1 bis 20 durchnummeriert sind, vier Stück ohne zurücklegen gezogen, wobei es auf die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, nicht ankommt. Herr Müller tippt auf die Zahlen 1, 2, 19 und 20. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass er genau zwei Kugeln richtig tippt.
