Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094921
Fax: +49(0)241-8092323
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik III (Bachelor/ Vordiplom)
SS 2009
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

---

1. Aufgabe *(13 Punkte)*

Betrachten Sie das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 3\big\} \to \mathbb{R}^3,$$

definiert durch

$$f(x,y,z) := \left(-\pi \log(y^2+e)\sin(\pi x) + \frac{2x}{(z-3)^2},\ \frac{2y\cos(\pi x)}{y^2+e},\ \frac{-2x^2}{(z-3)^3}\right).$$

Untersuchen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_{\Gamma} f \cdot d\gamma$$

zunächst auf Wegunabhängigkeit in $B_2(0) := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 < 4\big\}$. Berechnen Sie anschließend den Wert des Kurvenintegrals für die Kurve $\Gamma \subset B_2(0)$, parametrisiert durch $\gamma : [0,1] \to B_2(0)$,

$$\gamma(t) := \big(t^3, \cos(2\pi t) - 1, 0\big).$$

2. Aufgabe *(10 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld definiert durch

$$f(x,y,z) := (4xz, -y^2, yz).$$

Berechnen Sie

$$\int\limits_{\mathcal{F}} f \cdot N\, do,$$

wobei $\mathcal{F}$ die Oberfläche des Würfels ist, der begrenzt wird durch die Flächen

$$x = 0,\ x = 1,\ y = 0,\ y = 1,\ z = 0,\ z = 1$$

und N die nach außen zeigende Normale an den Würfel ist.

3. Aufgabe *(11 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x\big(1-x^2\big)^n$$

(a) im Intervall $\big(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\big)$ punktweise konvergiert.

(b) in jedem Intervall $[a,b] \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, mit $a < 0 < b$, nicht gleichmäßig konvergiert.

(c) in jedem Intervall $[a,b] \subset (0, \sqrt{2})$ gleichmäßig konvergiert.

— Bitte wenden! —

4. Aufgabe *(11 Punkte)*

Es sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(t) := \begin{cases} c & \text{für } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie c und die Verteilungsfunktion von X.

b) Durch

$$Y := -\frac{1}{2} \log\big(|X - 1|\big)$$

ist eine stetige Zufallsvariable Y definiert. Zeigen Sie, dass

$$P(Y > a)P(Y > b) = P(Y > a + b)$$

für alle $a, b > 0$.

5. Aufgabe *(9 Punkte)*

Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x, y) := \exp(x)y^5 + \log(1 + x^4)y^4 - 2\cosh(x)y^3 + \sinh(x)y^2 + y.$$

Bestimmen Sie eine Nullstelle der Funktion F, die von der Form $(0, y_0)$ für $y_0 \in \mathbb{R}$ ist und die die folgende Eigenschaft aufweist: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine von $(0, y_0)$ verschiedene Nullstelle $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ von F, die $|x_\varepsilon| < \varepsilon$ erfüllt.

Aufgabe 1

Möglichkeit 1:

f ist stetig differenzierbar (1) auf $\overline{B_2(0)}$ und $B_2(0)$ ist konvex. (1)

Es gilt

$$\operatorname{rot}(f) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ \frac{-4x}{(z-3)^3} - \frac{-4x}{(z-3)^3} \\ \frac{-\pi 2y \sin(\pi x)}{y^2+e} - \frac{-2\pi y \sin(\pi x)}{y^2+e} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

2. Hauptsatz $\Rightarrow$ Das Integral ist wegunabhängig.

Für den Weg $\gamma : [0,1] \to B_2(0)$ gilt

$$\gamma(0) = (0,0,0), \quad \gamma(1) = (1,0,0).$$

Gehe daher über zu einer anderen Kurve mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Aufgrund der Wegunabhängigkeit (3) ändert das den Wert des Integrals nicht. Sei also

$$\gamma^* : [0,1] \to B_2(0), \quad \gamma^*(t) = (t,0,0), \qquad \gamma^{*\prime}(t) = (1,0,0)$$

dann ist

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma = \int_0^1 -\pi \log(e) \sin(\pi t) + \frac{2t}{9}\, dt$$

$$= -\pi \int_0^1 \sin(\pi t)\, dt + \frac{2}{9}\int_0^1 t\, dt$$

$$= \cos(\pi t)\Big|_0^1 + \frac{1}{9} t^2 \Big|_0^1$$

$$= -2 + \frac{1}{9} = -\frac{17}{9} \qquad (5)$$

Möglichkeit 2:

Versuche, den 1. Hauptsatz anzuwenden:

$$\int f_1 \, dx = \int -\pi \log(y^2+e) \sin(\pi x) + \frac{2x}{(z-3)^2} \, dx$$

$$= \log(y^2+e)\cos(\pi x) + \frac{x^2}{(z-3)^2} + c(y,z)$$

$$\int f_2 \, dy = \int \frac{2y\cos(\pi x)}{y^2+e} \, dy = \log(y^2+e)\cos(\pi x) + \tilde{c}(x,z)$$

$$\int f_3 \, dz = \int \frac{-2x^2}{(z-3)^3} \, dz = \frac{2x}{(z-3)^2} + \bar{c}(x,z)$$ 3

$\Rightarrow$ Die Funktion $h : B_2(0) \to \mathbb{R}$, $h(x,y,z) = \log(y^2+e)\cos(\pi x) + \frac{2x}{(z-3)^2}$

erfüllt $\nabla h(x,y,z) = f(x,y,z)$. Damit ist das Integral 2

nach dem 1. Hauptsatz wegunabhängig.

Weiterhin sagt der Hauptsatz:

$$\int_\Gamma f \cdot d\gamma = h(\gamma(1)) - h(\gamma(0))$$ 3

Mit $\gamma(0) = (0,0,0)$ und $\gamma(1) = (1,0,0)$ folgt

$$h(\gamma(0)) = 1 \quad \text{und} \quad h(\gamma(1)) = -1 + \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f \cdot d\gamma = -1 + \frac{2}{9} - 1 = -\frac{17}{9}$$ 5

A2)

Nach dem Gaußschen Integralsatz gilt:

$$\int_{\mathcal{F}} f \cdot N \, do = \int_V \operatorname{div} f \, dx\,dy\,dz$$

wobei $\mathcal{F} = \partial V$. Also V stückweise glatt berandet

f ist stetig diffbar (2) und es gilt

$\operatorname{div} f = 4z - y$ (2)

Damit gilt

(2)

$$\int_V \operatorname{div} f \, dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (4z-y) \, dx\,dy\,dz$$

$$= 1 \cdot \int_0^1 (2z^2 - yz)\Big|_{z=0}^{1} dy = \int_0^1 2-y \, dy = \frac{3}{2}$$ (2) (2)

Aufgabe 3

a) Es gilt $|1-x^2| < 1$ für $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n$ konvergiert und es gilt

$$x \sum_{n=0}^{\infty} (1-x^2)^n = \frac{x}{1-(1-x^2)} = \frac{1}{x} \quad \text{für } x \neq 0$$

Für $x = 0$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n = 0$ 3

$\Rightarrow$ Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n$ konvergiert auf $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ punktweise.

b) Nach Vor. gilt $0 \in [a,b]$. Die Funktionen $f_n(x) := x(1-x^2)^n$ sind stetig auf $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Angenommen, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$.

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) =: f(x)$ ist stetig auf $[a,b]$. 4

Es gilt aber $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\lightning$

c) Aus $[a,b] \subset (0, \sqrt{2})$ folgt

$$0 < \frac{a}{2} < a < b < \sqrt{2}$$

Falls $a < 1$: $|x(1-x^2)^n| \leq \sqrt{2}\, |1-x^2|^n < \sqrt{2}\, |1-\frac{a^2}{4}|^n$ für $x \in [a,b]$ und $n \geq 0$.

Falls $a \geq 1$: $|x(1-x^2)^n| \leq \sqrt{2}\, |1-x^2|^n < \sqrt{2}\, |1-b^2|^n$ für $x \in [a,b]$ und $n \geq 0$.

Insgesamt gilt

$$|x(1-x^2)^n| < \sqrt{2}\, \max\left\{\left|1-\frac{a^2}{4}\right|^n, |1-b^2|^n\right\}$$

für $x \in [a,b]$ und $n \geq 0$.

Da $\left|1-\frac{a^2}{4}\right| < 1$ und $|1-b^2| < 1$ konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \left|1-\frac{a^2}{4}\right|^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |1-b^2|^n$.

(Majorantenkriterium) $\Rightarrow$ $\sum_{n=0}^{\infty} x(1-x^2)^n$ konvergiert gleichmäßig auf $[a,b]$.

4

Aufgabe 4

a) • $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1 \iff \int_0^1 c\,dx = 1 \iff \underline{\underline{c=1}}$ 1

• $F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \underline{\underline{\begin{cases} 1 & \text{für } t \geq 1 \\ t & \text{für } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}}}$ 2

b) • Für $a > 0$ gilt:

$$P(Y > a) = P\left(-\tfrac{1}{2}\log(|X-1|) > a\right)$$

$$= P\left(\log(|X-1|) < -2a\right) \quad 1$$

$$= P\left(X \geq 1 \wedge \log(X-1) < -2a\right) + P\left(X < 1 \wedge \log(1-X) < -2a\right) \quad 2$$

$$= 0 + P\left(X < 1 \wedge 1 - e^{-2a} < X\right) \quad ; \text{ denn } P(X \geq 1 \wedge \ldots) \leq P(X \geq 1) = 1 - F_X(1) = 0 \quad 2$$

$$= \int_{1-e^{-2a}}^{1} 1\,dx = e^{-2a} \quad 2$$

• Es folgt, dass

$$P(Y > a)\,P(Y > b) = e^{-2a} \cdot e^{-2b} = e^{-2(a+b)} = P(Y > a+b) \quad 1$$

für $a, b > 0$.

$\square$

Aufgabe 5

Die Funktion F ist stetig differenzierbar als Summe und Produkt stetig differenzierbarer Funktionen.

Weiter gilt
$$F(0, y) = y^5 - 2y^3 + y$$
$$= y(y^4 - 2y^2 + 1)$$
$$= y(y^2 - 1)^2$$
$$= y(y-1)^2(y+1)^2$$

2

$\Rightarrow$ Die Nullstellen der Form $(0, y)$ von F sind $(0,0)$, $(0,1)$ und $(0,-1)$. Prüfe, für welche dieser Nullstellen die Vor. des Satzes über implizite Funktionen erfüllt sind:

$$\frac{\partial}{\partial y} F(x, y) = 5 \exp(x) y^4 + 4 \log(1+x^4) y^3 - 6 \cosh(x) y^2 + 2 \sinh(x) y + 1$$

2

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} F(0,0) = 1 \neq 0$$

1

$\Rightarrow \exists$ Rechteck $R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ |x| \leq a,\ |y| \leq b\}$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \text{für} \quad x \in [-a, a].$$

2

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Wähle zu $x_\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $|x_\varepsilon| < \min\{a, \varepsilon\}$ $y_\varepsilon := f(x_\varepsilon)$.

2