RWTH AACHEN

Prof. Dr. Josef Bemelmans
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 1010 | 111 (Hauptgebäude)

Tel.: +49 241 80 94889
Sekr.: +49 241 80 94921
Fax: +49 241 80 92323
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
SoSe 2012

Klausur: Höhere Mathematik III

10. September 2012
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1 **[12 Punkte]**

Gegeben seien der Hohlzylinder $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 < x^2+y^2 < R_2^2,\ |z| < 1\}$, $0 < R_1 < R_2 < \infty$, und das Vektorfeld $f := \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch

$$f(x,y,z) := \left(x\cos^2(z) + x^2yz,\ y\sin^2(z)+1,\ -xyz^2 + e^{x^2+y^2} \right) .$$

Berechnen Sie den Fluss

$$\int_M f \cdot N \,\mathrm{d}S$$

durch die Mantelfläche $M := M_1 \cup M_2$, wobei $M_k := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = R_k^2, |z| < 1\}$, $k = 1, 2$. N bezeichne den nach außen gerichteten Normalenvektor an M.

Lösung

Wir überprüfen zunächst die Voraussetzungen für die Verwendung des Integralsatzes von Gauß:
f ist stetig differenzierbar in Z. Desweiteren besteht ∂Z aus endlich vielen regulären Flächen. **[2]**

Folglich ist der Satz von Gauß anwendbar und es gilt

$$\int_M f \cdot N \,\mathrm{d}S = \int_Z \mathrm{div} f \,\mathrm{d}\mathcal{V} - \int_{K_{+1}} f \cdot N_{+1} \,\mathrm{d}S - \int_{K_{-1}} f \cdot N_{-1} \,\mathrm{d}S . \qquad \textbf{[2]}$$

Dabei sind $K_h := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : R_1^2 < x^2+y^2 < R_2^2,\ z = h\}$, $h = \pm 1$, die Kreisringe mit den nach außen gerichteten Normalenvektoren $N_h := (0,0,h)$, $h = \pm 1$. **[1]**

Es gilt

$$\mathrm{div} f(x,y,z) = \cos^2(z) + \sin^2(z) = 1, \qquad \textbf{[2]}$$

und damit folgt

$$\int_Z \mathrm{div} f \,\mathrm{d}\mathcal{V} = \int_Z 1 \,\mathrm{d}\mathcal{V} = 2\pi(R_2^2 - R_1^2). \qquad \textbf{[2]}$$

Schließlich gilt wegen der entgegengesetzten Normalenvektoren N_{+1} und N_{-1} und wegen der Symmetrie bezüglich z in der dritten Komponente von f

$$\int_{K_{+1}} f \cdot N_{+1} \,\mathrm{d}S = - \int_{K_{-1}} f \cdot N_{-1} \,\mathrm{d}S. \qquad \textbf{[3]}$$

Insgesamt ist also

$$\int_M f \cdot N \,\mathrm{d}S = \int_Z \mathrm{div} f \,\mathrm{d}\mathcal{V} = 2\pi(R_2^2 - R_1^2).$$

Aufgabe 2 **[9 Punkte]**

(a) Es seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld, definiert durch $f(x,y,z) = (e^z y, zy^3 - x, x^2 e^y z)$, $\mathcal{F}$ eine reguläre Fläche, gegeben durch $\mathcal{F} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1 - z,\ z > 0\}$, und n die Normale an $\mathcal{F}$ mit positiver z-Komponente. Berechnen Sie $\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot n \, \mathrm{d}o$.

(b) Es seien $\mathcal{F}$ eine reguläre Fläche in $\mathbb{R}^2$ mit Randkurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f = (f_1, f_2)$, ein auf $\overline{\mathcal{F}}$ stetig differenzierbares Vektorfeld. Zeigen Sie $\int\limits_{\Gamma} f \, \mathrm{d}\gamma = \int\limits_{\mathcal{F}} \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \, \mathrm{d}\sigma$.

Lösung

(a) Wir möchten die Aufgabe mit dem Integralsatz von Stokes lösen und überprüfen zunächst, ob die Voraussetzungen für dessen Anwendung gegeben sind.
$\mathcal{F}$ ist regulär, $\mathcal{F}$ ist von einer geschlossenen Kurve, die wir Γ nennen wollen, berandet. Der Integrand f ist stetig differenzierbar. **[1]**
Der Stokessche Satz ist also anwendbar und es gilt, wenn man den Durchlaufsinn von Γ korrekt wählt,

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(f) \cdot n \, \mathrm{d}o = \int\limits_{\Gamma} f \, \mathrm{d}\gamma \,. \qquad \textbf{[1]}$$

Γ lässt sich parametrisieren durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, gegeben durch $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$. **[1]**
Beachte: n bildet mit dem über die Definition von γ gegebenen Umlaufsinn von Γ eine Rechtsschraube.
Jetzt ist

$$\int\limits_{\Gamma} f \, \mathrm{d}\gamma = \int\limits_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} f(\cos(t), \sin(t), 0) \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int\limits_0^{2\pi} -\sin^2(t) - \cos^2(t) \, \mathrm{d}t = -2\pi. \quad \textbf{[3]}$$

(b) Definiere $F(x,y,z) := (f_1, f_2, 0)(x,y,z)$ und $N := (0,0,1)$. Dann ist, wenn man $\Gamma := \partial\mathcal{F}$ setzt, der Satz von Stokes auf das Integral $\int_\Gamma F \, \mathrm{d}\gamma$ anwendbar, und es gilt für eine passende Parametrisierung $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, 0)$ von Γ: **[1]**

$$\int\limits_{\Gamma} F \, \mathrm{d}\gamma = \int\limits_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} F \cdot N \, \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\mathcal{F}} \left[\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} -\partial_z f_2 \\ \partial_z f_1 \\ \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\sigma = \int\limits_{\mathcal{F}} \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \, \mathrm{d}\sigma. \ \textbf{[1]}$$

Berechnet man das Integral $\int_\Gamma F \, \mathrm{d}\gamma$ ohne Verwendung des Integralsatzes von Stokes, erhält man

$$\int\limits_{\Gamma} F \, \mathrm{d}\gamma = \int\limits_{\Gamma} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{\Gamma} f_1(\gamma(t)) \cdot \gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t)) \cdot \gamma_2'(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{\Gamma} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{\Gamma} f \, \mathrm{d}\gamma. \ \textbf{[1]}$$

Da die linken Seiten der Gleichungsketten gleich sind, muss das auch für die rechten Seiten gelten. Die Behauptung

$$\int\limits_{\Gamma} f \, \mathrm{d}\gamma = \int\limits_{\mathcal{F}} \partial_x f_2 - \partial_y f_1 \, \mathrm{d}\sigma$$

folgt unmittelbar.

Aufgabe 3 **[11 Punkte]**

Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass durch $u(x) = \int_0^1 G(x,y) f(y)\,dy$ eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

gegeben ist.

Dabei sei G die Greensche Funktion, die durch $G(x,y) = \dfrac{1}{\sin(1)} \cdot \begin{cases} \sin(x)\sin(y-1), & 0 \le x \le y \le 1, \\ \sin(y)\sin(x-1), & 0 \le y \le x \le 1. \end{cases}$

gegeben ist.

Lösung

Mit der Leibnizregel gelten

$$\begin{aligned} \sin(1)u'(x) &= \int_0^x \sin(y)\cos(x-1) f(y)\,dy + \sin(x)\sin(x-1)f(x) \\ &\quad + \int_x^1 \cos(x)\sin(y-1)f(y)\,dy - \sin(x)\sin(x-1)f(x) \\ &= \int_0^x \sin(y)\cos(x-1)f(y)\,dy + \int_x^1 \cos(x)\sin(y-1)f(y)\,dy \end{aligned} \qquad \textbf{[3]}$$

und

$$\begin{aligned} \sin(1)u''(x) &= -\int_0^x \sin(y)\sin(x-1)f(y)\,dy + \sin(x)\cos(x-1)f(x) \\ &\quad - \int_x^1 \sin(x)\sin(y-1)f(y)\,dy - \cos(x)\sin(x-1)f(x) \\ &= -u(x)\sin(1) + (\sin(x)\cos(x-1) - \cos(x)\sin(x-1))\,f(x) \\ &= -u(x)\sin(1) + \sin(x-x+1)f(x) \\ &= -u(x)\sin(1) + f(x)\sin(1) \end{aligned} \qquad \textbf{[5]}$$

Also ist $u''(x) + u(x) = f(x)$. **[1]**

Überprüfung der Randwerte:

$$u(0) = \int_0^0 \cdots\,dy + \int_0^1 0\,dy = 0\,, \qquad \textbf{[1]}$$

$$u(1) = \int_0^1 0\,dy + \int_0^0 \cdots\,dy = 0\,. \qquad \textbf{[1]}$$

Also ist $u(x) = \int_0^1 G(x,y)f(y)\,dy$ eine Lösung der gegeben Randwertaufgabe.

Aufgabe 4 **[12 Punkte]**

Seien $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodischen Fortsetzungen der Funktionen $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$ bzw. $g : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen gegeben durch $f(x) = x(2\pi - x)$ bzw. $g(x) = f(x + \pi)$.

(a) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten von G.

(b) Seien $\alpha_n,\ n \in \mathbb{Z}$, die komplexen Fourier-Koeffizienten von F und $\beta_n,\ n \in \mathbb{Z}$, die komplexen Fourier-Koeffizienten von G. Weisen Sie die Beziehung $\alpha_n = (-1)^n \beta_n$ nach.

(c) Bestimmen Sie mithilfe der Teilaufgaben (a) und (b) die komplexen Fourier-Koeffizienten von F.

Lösung

(a) Wir bestimmen zunächst g explizit und können aus der expliziten Darstellung sofort eine Information über die Koeefizienten $b_n,\ n \in \mathbb{N}$, ablesen:

$$f(x) = x(2\pi - x), \qquad x \in [0, 2\pi)\,.$$

$$\Rightarrow \quad g(x) = (x + \pi)(\pi - x) = \pi^2 - x^2, \qquad x \in [-\pi, \pi)\,. \qquad \textbf{[1]}$$

$\Rightarrow$ g ist gerade. Insbesondere gilt also $b_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$. **[1]**

Wir bestimmen nun die Koeffizienten a_0 und $a_n,\ n \in \mathbb{N}$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi^2 - x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-\pi}^{+\pi} = \frac{4}{3}\pi^2\,. \qquad \textbf{[1]}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \pi\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\pi}{n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{+\pi}}_{=0} - \underbrace{\left[\frac{x^2}{\pi n}\sin(nx)\right]_{-\pi}^{+\pi}}_{=0} + \frac{2}{\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2x}{\pi n^2}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{+\pi} - \underbrace{\frac{2}{\pi n^2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x}_{=0,\text{ s.o.}}$$

$$= -\frac{2}{n^2}(-1)^n - \frac{2}{n^2}(-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^{n+1}\,. \qquad \textbf{[4]}$$

(b)
$$\alpha_n = \int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} x(2\pi - x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \overset{s=x-\pi}{=} \int_{-\pi}^{\pi}(s+\pi)(\pi - s)e^{-in(s+\pi)}\,\mathrm{d}s$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} g(s)e^{-ins}\underbrace{e^{-in\pi}}_{=(-1)^n}\,\mathrm{d}s = (-1)^n\beta_n \qquad \textbf{[2]}$$

(c) Mit Aufgabenteil (a) und

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

erhält man die komplexen Fourierkoeffizienten c_n von G:

$$c_0 = \frac{2}{3}\pi^2,\ c_n = \frac{2}{n^2}(-1)^{n+1},\ c_{-n} = \frac{2}{n^2}(-1)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \textbf{[2]}$$

Mit Aufgabenteil (b) erhalten wir die komplexen Fourierkoeffizienten d_n von F:

$$d_0 = \frac{2}{3}\pi^2,\ d_n = -\frac{2}{n^2},\ d_{-n} = -\frac{2}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad \textbf{[1]}$$

Aufgabe 5 **[10 Punkte]**

Durch einen nicht gleichmäßig tropfenden Wasserhahn gehen pro Tag zwischen zwei und vier Liter Wasser verloren. Jede verlustig gehende Wassermenge sei dabei an jedem Tag gleich wahrscheinlich. Wie viele Tage müssen mindestens vergehen, damit es zu mindestens 50% wahrscheinlich ist, dass insgesamt mindestens 1.000 Liter Wasser verloren gegangen sind?

Lösung

X_i sei die Zufallsvariable, die dem i-ten Tag die an ihm verlustig gegangenen Wassermenge in Litern zuordne. Für alle $X_i,\ i = 1, 2...,$ sind

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ t/2 - 1, & 2 \leq t < 4, \\ 1, & 4 \leq t, \end{cases} \qquad \mathbf{[2]}$$

die Verteilungsfunktion,

$$f_{X_i}(t) = \frac{\partial F_{X_i}(t)}{\partial t} = \begin{cases} 0, & t < 2, \\ 1/2, & 2 \leq t < 4, \\ 0, & 4 \leq t, \end{cases} \qquad \mathbf{[1]}$$

die Dichte,

$$\mathrm{E}(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_{X_i}(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^4 t/2\,\mathrm{d}t = 3 \qquad \mathbf{[1]}$$

der Erwartungswert und

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - (\mathrm{E}(X_i))^2 = \int_2^4 t^2/2\,\mathrm{d}t - 9 = \frac{1}{3} \qquad \mathbf{[1]}$$

die Varianz.

Da die $X_i,\ i = 1, 2, ...,$ i.i.d. („independent and identically distributed“, d.h. gleichverteilt und unabhängig) sind, sind bei der Summenvariablen $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$ der Erwartungswert $\mathrm{E}(S_n) = 3n$ und die Varianz $\mathrm{Var}(S_n) = n/3$. **[2]**

Gesucht ist jetzt ein $n \in \mathbb{N}$, für das $p(S_n \geq 1000) \geq 50\%$ ist beziehungsweise, nach Standardisierung der Zufallsvariablen,

$$1 - p((S_n - 3n)/\sqrt{n/3} < (1000 - 3n)/\sqrt{n/3}) \approx 1 - \Phi((1000 - 3n)/\sqrt{n/3}) \overset{!}{\geq} 50\%. \qquad \mathbf{[2]}$$

Bekannt: $\Phi(0) = 0{,}5$. Also erhält man die Ungleichung $(1000 - 3n)/\sqrt{n/3} \leq 0$. Auflösen nach n:
$(1000 - 3n)/\sqrt{n/3} \leq 0 \Leftrightarrow 1000 \leq 3n \Leftrightarrow n \geq 1000/3$. **[1]**

Nach 334 Tagen hat man also mit einer Wahrscheinlichkeit von über 50% mehr als 1.000 Liter Wasser verloren.