Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094889
Fax: +49(0)241-8092323
Sekr.: +49(0)241-8094921
+49(0)241-8094922
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik III (Bachelor / Vordiplom)
WS 2008/2009
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

---

1. Aufgabe *(12 Punkte)*

Es seien

$$B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4\,, 0 < z < 4 - x^2 - y^2\}$$

und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$f(x,y,z) := (x+y, y+z, x+z)$$

gegeben. Berechnen Sie

$$\int_{\partial B} f \cdot N \, do\,,$$

wobei N die nach außen zeigende Normale an B ist.

2. Aufgabe *(13 Punkte)*

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad |x| < 1, \\ |x| & \text{für} \quad 1 \le |x| \le \pi. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fourierreihe von f und zeigen Sie damit, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n) - (-1)^n}{n^2} = \frac{(\pi-1)^2}{4}$$

gilt.

3. Aufgabe *(10 Punkte)*

In einer Firma sind die Mitarbeiter auf insgesamt 4 Standorte verteilt. Die Verteilung der Mitarbeiter ist: 40% in Standort 1, 30% in Standort 2, 20% in Standort 3 und 10% in Standort 4. Der Männeranteil der Mitarbeiter ist 50% in Standort 1, 60% in Standort 2, 90% in Standort 3 und 40% in Standort 4.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Mitarbeiter ein Mann ist?

b) Ein zufällig ausgewählter Mitarbeiter sei ein Mann. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Mitarbeiter in Standort 1 arbeitet?

— Bitte wenden! —

4. Aufgabe *(9 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+x^n} - 1\right)$$

im Intervall $[0, a]$, $0 < a < 1$, gleichmäßig konvergiert.

5. Aufgabe *(10 Punkte)*

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ beliebig. Zerlegen Sie a so in drei Summanden $x, y, z > 0$, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x, y, z) := x^p y^q z^r$ maximal wird, wobei $p, q, r > 0$.

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass der einzige kritische Punkt, den Sie finden, die Maximalstelle ist.

A1)

Berechne $\int_{\partial B} f\cdot N \, do$ mit dem Satz von Gauß.

1 (f ist stetig diffbar, B ist zulässig)

$$\int_{\partial B} f\cdot N \, do \overset{2}{=} \int_{B} \operatorname{div} f \, dx\, dy\, dz$$

$$\operatorname{div} f = 3 \quad 2$$

$$\Rightarrow \int_{B} \operatorname{div} f \, dx\, dy\, dz = \iint_{x^2+y^2<4} \int_0^{4-x^2-y^2} 3 \, dz\, dx\, dy$$

$$= 3 \iint_{x^2+y^2<4} (4-x^2-y^2) \, dx\, dy \overset{P.K.}{\underset{3}{=}} 3 \int_0^{2\pi}\int_0^{2} r(4-r^2)\, dr\, d\varphi$$

P.K.: 1 $0<r<2$, $0<\varphi<2\pi$, $F\det = r$

$$= 6\pi \int_0^2 r(4-r^2)\, dr = 6\pi \left(2r^2 \Big|_0^2 - \frac{r^4}{4}\Big|_0^2 \right) \quad 2$$

$$= 6\pi(8-4) = \underline{\underline{24\pi}} \quad 1$$

Aufgabe 2

Berechne die Fourier - Koeffizienten der Funktion f:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \underset{f \text{ gerade}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^1 dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi} + \frac{1}{\pi}(\pi^2 - 1) = \frac{1}{\pi}(\pi^2 + 1) \quad ②$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \cos(nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_1^{\pi} x\cos(nx)\,dx$$

$u = x \Rightarrow u' = 1$

$v' = \cos(nx) \Rightarrow v = \frac{1}{n}\sin(nx)$

$$= \underbrace{\frac{2}{n\pi}\sin(nx)\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\,x\sin(nx)\Big|_1^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{n\pi}\int_1^{\pi}\sin(nx)\,dx$$

$$= \frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_1^{\pi} = \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - \cos(n)\right) \quad ④$$

$b_n = 0$, da f gerade und damit $f \cdot \sin(nx)$ ungerade ②

Damit erhalten wir die Fourier-Reihe

$$T_f(x) = \frac{\pi^2+1}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - \cos(n)\right)\cos(nx) \quad ①$$

Nach dem Hauptsatz über Fourier-Reihe gilt (f ist stückweise glatt & stetig) ①

$$f(0) = T_f(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{\pi^2+1}{2\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - \cos(n)}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{\pi^2+1}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - \cos(n)}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-(\pi-1)^2}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - \cos(n)}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(\pi-1)^2}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n) - (-1)^n}{n^2} \quad ③$$

3. Aufgabe

Modell: $\Omega := \{(s,g) \mid s \in \{1,2,3,4\} \wedge g \in \{M,F\}\}$

$M := \{(s,g) \in \Omega \mid g = M\}$

$S_i := \{(s,g) \in \Omega \mid s = i\} \quad , \quad i = 1,2,3,4$

$P(S_1) = 0{,}4 \quad P(S_2) = 0{,}3 \quad P(S_3) = 0{,}2 \quad P(S_4) = 0{,}1$

$P(M \mid S_1) = 0{,}5 \quad P(M \mid S_2) = 0{,}6 \quad P(M \mid S_3) = 0{,}9 \quad P(M \mid S_4) = 0{,}4$

3

a) $P(M) = P(M \mid S_1) \cdot P(S_1) + P(M \mid S_2) \cdot P(S_2) + P(M \mid S_3) \cdot P(S_3) + P(M \mid S_4) P(S_4)$

$= 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}9 \cdot 0{,}2 + \cancel{0{,}1}\ 0{,}4 \cdot 0{,}1$

$= 0{,}2 + 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}04 = \underline{\underline{0{,}6}}$

3

b) $P(S_1 \mid M) = \dfrac{P(M \mid S_1) P(S_1)}{P(M)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}6} = \underline{\underline{\dfrac{1}{3}}}$

4

Aufgabe 4

Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mit $f_n(x) = \sqrt{1+x^n} - 1$

Glm. Konvergenz auf $[0,a]$, $a<1$, mit Majoranten-Kriterium von Weierstraß:

- $$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{(\sqrt{1+x^n} - 1)\cdot(\sqrt{1+x^n}+1)}{\sqrt{1+x^n}+1} =$$

$$= \frac{x^n}{\sqrt{1+x^n}+1} \leq x^n \leq a^n \quad \forall x \in [0,a]$$ 5

- $$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad (<\infty) \quad \text{da } a<1 \quad (\text{geometr. Reihe})$$ 3

(konvergente Majorante für $\sum_n f_n$)

$\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ist glm. konvergent auf $[0,a]$ 1

Satz 1.7
S. 75

Aufgabe 5:

Sei $g: \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x,y,z) := x + y + z - a$$

Gesucht ist die Maximalstelle von f unter der Nebenbedingung $g = 0$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Gebiet und $f, g: \Omega \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar. Weiter gilt $\nabla g(x,y,z) \overset{1}{=} (1,1,1) \neq 0$ 1

(Satz 4.10) $\Rightarrow$ zu jeder Maximal- bzw. Minimalstelle (x_0, y_0, z_0) von f unter der Nebenbedingung $g(x_0, y_0, z_0) = 0$ existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$ 1

Es gilt: $\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} p\, x_0^{p-1}\, y_0^q\, z_0^r \\ q\, x_0^p\, y_0^{q-1}\, z_0^r \\ r\, x_0^p\, y_0^q\, z_0^{r-1} \end{pmatrix}$ 1

Löse das Gleichungssystem

$$\begin{cases} p\, x_0^{p-1}\, y_0^q\, z_0^r = \lambda \\ q\, x_0^p\, y_0^{q-1}\, z_0^r = \lambda \\ r\, x_0^p\, y_0^q\, z_0^{r-1} = \lambda \\ x_0 + y_0 + z_0 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\, x_0^p\, y_0^q\, z_0^r = \lambda x_0 \\ q\, x_0^p\, y_0^q\, z_0^r = \lambda y_0 \\ r\, x_0^p\, y_0^q\, z_0^r = \lambda z_0 \\ x_0 + y_0 + z_0 = a \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad p\, x_0^p y_0^q z_0^r + q\, x_0^p y_0^q z_0^r + r\, x_0^p y_0^q z_0^r = \lambda(x_0 + y_0 + z_0)$$
$$= \lambda a$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0^p y_0^q z_0^r = \frac{\lambda}{p+q+r} a$$

Einsetzen in $(*)$ liefert im Fall $\lambda \neq 0$:

$$p \frac{\lambda}{p+q+r} a = \lambda x_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{p}{p+q+r} a$$ 4

$$q \frac{\lambda}{p+q+r} a = \lambda y_0 \quad \Leftrightarrow \quad y_0 = \frac{q}{p+q+r} a$$

$$r \cdot \frac{\lambda}{p+q+r} a = \lambda z_0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 = \frac{r}{p+q+r} a$$

Falls $\lambda = 0$ gilt $\nabla f(x_0, y_0 z_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0$
Da aber $(0,0,0) \notin \Omega$ ist $(0,0,0)$ keine Maximal- bzw. Minimalstelle. 1

$$\Rightarrow \left(\frac{p}{p+q+r} a, \frac{q}{p+q+r} a, \frac{r}{p+q+r} a \right)$$ ist der gesuchte 1

Maximierer.