Prof. Dr. Josef Bemelmans
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094889
Fax: +49(0)241-8092323
Sekr.: +49(0)241-8094921
+49(0)241-8094922
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 110/111
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik III (Bachelor / Vordiplom)
WS 2008/2009
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

---

1. Aufgabe *(13 Punkte)*

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Stokes das Integral

$$\int_\Gamma yz^2\,dx + (xz - 2y)\,dy + 2xyz\,dz\,,$$

wobei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert wird durch $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) := (\cos(t), \sin(t), \cos(t))\,,$$

indem Sie das Kurvenintegral in ein Oberflächenintegral umwandeln und dieses ausrechnen.

2. Aufgabe *(10 Punkte)*

Es sei $G := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 < 3, -1 < z < 1, xy > 0\}$.
Berechnen Sie das Volumenintegral

$$\int_G \frac{1}{(1+z^2)(1+x^2+y^2)}\,dxdydz\,.$$

3. Aufgabe *(10 Punkte)*

In einem Spiel wird ein Dartpfeil auf eine Kreisscheibe K mit Radius 1, d.h.

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\},$$

geworfen. Der Pfeil trifft jeden Punkt auf der Scheibe mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Der Pfeil trifft immer die Scheibe. Die Scheibe wird durch 2 Kreise mit Radius $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{2}{3}$ in die drei Gebiete

$$G_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{1}{3}\},$$
$$G_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{2}{3}\},$$
$$G_3 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{2}{3} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < 1\},$$

unterteilt. Als Gewinn wird

- 3 Euro ausgezahlt, wenn der Pfeil G_1 trifft;
- 2 Euro ausgezahlt, wenn der Pfeil G_2 trifft;
- 1 Euro ausgezahlt, wenn der Pfeil G_3 trifft.

Die Zufallsvariable X bezeichne den Gewinn bei einem Wurf. Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ von X.

— Bitte wenden! —

4. Aufgabe *(11 Punkte)*

Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (x^{n-1} - x^n)$$

im Intervall $[0, 1]$ nicht gleichmäßig konvergiert.

5. Aufgabe *(10 Punkte)*

Betrachten Sie die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(x, y) := \sin(x) - \cos(y) + \exp(xy). \tag{1}$$

Zeigen Sie zunächst, dass F in einer Umgebung des Punktes $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ nach y auflösbar ist. Nehmen Sie nun an, dass die durch Gleichung (1) implizit definierte Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ die Bedingung $f(0) = 1$ erfüllt und berechnen Sie $f'(0)$.

Wende Satz von Stokes an

$$\int_\Gamma f \, d\gamma = \int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot N \, do$$

$$\operatorname{rot} f = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} yz^2 \\ xz - 2y \\ 2xyz \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2xz - x \\ 0 \\ z - z^2 \end{pmatrix}}} \quad (2)$$

Parametrisiere eine Fläche $\mathcal{F}$ mit Randkurve Γ durch:

$$\mathcal{F} : \{x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (4)$$

$$\mathcal{F}(x,y) := (x, y, x)$$

Damit ist die Normale an $\mathcal{F}$ die mit der Orientierung von Γ eine Rechtsschraube bildet (1) gegeben durch

$$\underline{\underline{N := \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}} \quad (1)$$

Also

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} f \cdot N \, do \overset{z=x}{=} \iint_{\{x^2+y^2<1\}} \begin{pmatrix} 2x^2 - x \\ 0 \\ x - x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx \, dy$$

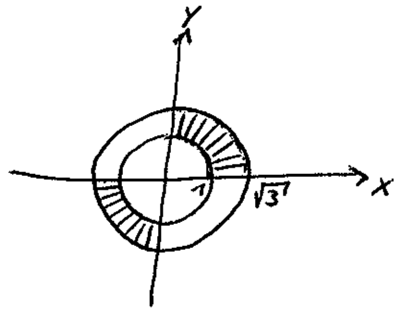
$$\overset{\text{P.K.}}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left(2r\cos(\varphi) - 3r^2 \cos^2(\varphi) \right) dr \, d\varphi \quad (3)$$

P.K.: $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$, $0 < r < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$, $\mathcal{F}$det $= r$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} \cos(\varphi) - \frac{3}{4} \cos^2(\varphi) \right) d\varphi = \frac{-3}{4} \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \, d\varphi = \underline{\frac{-3}{4} \pi} \quad (1)$$

Aufgabe 2

Projektion von G auf die x, y - Ebene:



Verwende Zylinderkoordinaten:

$x = r\cos(\varphi)$,

$y = r\sin(\varphi)$,

$z = z$,

dann gilt

$$\int_G \frac{1}{(1+z^2)(1+x^2+y^2)}\,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+z^2)}\cdot\frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\varphi\,dz + \int_{-1}^{1}\int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+z^2)}\cdot\frac{r}{1+r^2}\,dr\,d\varphi\,dz \quad 5$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+z^2}\,dz\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{r}{1+r^2}\,dr$$

$$= \pi\ \arctan(z)\Big|_{-1}^{1} \cdot \frac{1}{2}\log(1+r^2)\Big|_{1}^{\sqrt{3}} \quad 2 \quad 2$$

$$= \pi\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\log(4)-\log(2)\right) \quad 1$$

$$= \frac{\pi^2}{4}\log(2)$$

Aufgabe 3:

- $P(X=1) = \dfrac{\pi \cdot 1^2 - \pi \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2}{\pi} = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$

  $P(X=2) = \dfrac{\pi \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \pi \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi} = \dfrac{4}{9} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{3}{9}$

  $P(X=3) = \dfrac{\pi \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2}{\pi} = \dfrac{1}{9}$

6

- $E(X) = 1 \cdot P(X=1) + 2\, P(X=2) + 3 \cdot P(X=3)$

  $= \dfrac{5}{9} + \dfrac{6}{9} + \dfrac{3}{9} = \underline{\underline{\dfrac{14}{9}}}$

2

- $E(X^2) = 1 \cdot P(X=1) + 4 \cdot P(X=2) + 9 \cdot P(X=3)$

  $= \dfrac{5}{9} + \dfrac{12}{9} + \dfrac{9}{9} = \dfrac{26}{9}$

- $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{26}{9} - \left(\dfrac{14}{9}\right)^2 = \dfrac{234 - 196}{81} = \underline{\underline{\dfrac{38}{81}}}$

2

<u>Aufgabe 4</u>

Funktionenreihe $\sum_{n=2}^{\infty} f_n$ mit $f_n(x) = x^{n-1} - x^n$

• punktweise Konvergenz für jedes $x \in [0,1]$:

$\underline{x=0}$: $f(0) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \underbrace{f_n(0)}_{=0} = 0$ (1)

$\underline{x=1}$: $f(1) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \underbrace{f_n(1)}_{=0} = 0$ (1)

$\underline{x \in (0,1)}$: $f(x) := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} f_n(x) =$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} \left(\frac{1}{x} - 1\right) x^n =$$

$$= \frac{1-x}{x} \sum_{n=2}^{\infty} x^n \leftarrow \text{geometr. Reihe (konvergent da } x<1)$$

$$= \frac{1-x}{x} \left(\frac{1}{1-x} - 1 - x \right) \quad (3)$$

$$= \frac{\cancel{1-x}}{x} \cdot \frac{1-(1+x)(1-x)}{\cancel{1-x}}$$

$$= \frac{1-(1-x^2)}{x} = x \quad (2)$$

• die Funktionen f_n sind stetig auf $[0,1]$ ✓ (1)

- die Grenzfunktion f ist unstetig auf $[0,1]$,

denn $\lim\limits_{x \uparrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \uparrow 1} x = 1 \neq 0 = f(1)$ 2

$\underset{\text{Satz 1.6}}{\Longrightarrow}$ $\sum\limits_{n=2}^{\infty} f_n$ ist auf $[0,1]$ nicht glm. konvergent

S. 74 1