Prof. Dr. Josef Bemelmans
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 1010 | 111 (Hauptgebäude)

Tel.: +49 241 80 94889
Sekr.: +49 241 80 94921
Fax: +49 241 80 92323
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
WS 2011/12

23. Februar 2012
Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik III

Aufgabe 1 **[8 Punkte]**

Es seien F, $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

Die Funktion $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch $\phi(y) := -\int_0^y e^{(F(x)-F(y))} G(x)\,\mathrm{d}x$,

löst die Differentialgleichung $\phi'(y) + F'(y) \cdot \phi(y) + G(y) = 0$.

Lösung

F, G sind stetig differenzierbar.
Damit ist auch f, gegeben durch $f(y,x) := e^{(F(x)-F(y))}G(x)$, stetig differenzierbar (nach y).
Ebenso sind α und β, gegeben durch $\alpha(y) = 0$ und $\beta(y) = y$, differenzierbar.
Also gilt mit der Leibniz-Regel **[2]**

$$\phi'(y) = -\left[\int_0^y e^{(F(x)-F(y))}(-F'(y))G(x)\,\mathrm{d}x + e^{(F(y)-F(y))}G(y)\cdot 1 - e^{(F(0)-F(y))}G(0)\cdot 0\right] \quad \textbf{[4]}$$

$$= F'(y) \cdot \int_0^y e^{(F(x)-F(y))}G(x)\,\mathrm{d}x - G(y) \quad \textbf{[2]}$$

$$= -F'(y) \cdot \phi(y) - G(y).$$

Einsetzen liefert die Behauptung.

Aufgabe 2 **[14 Punkte]**

Der Körper K sei definiert durch

$$K := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} \leq 1 - \frac{z}{2}, \; y \leq 0, \; z \geq 0 \right\}.$$

Berechnen Sie mithilfe des Gaußschen Satzes den Fluss $\int_M F \cdot N \, \mathrm{d}\sigma$ des Vektorfelds $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $F(x,y,z) := \lambda(ye^{y^2}, -ze^{y^2}, yz^2e^{y^2}), \; \lambda > 0$, durch die reguläre Fläche

$$M := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} = 1 - \frac{z}{2}, \; y < 0, \; z > 0 \right\}.$$

Dabei bezeichne N die äußere Einheitsnormale an M, die z-Komponente von N sei also positiv.

Lösung

Zunächst stellen wir fest, dass K – zusätzlich zu M – durch die beiden Flächen

$$\Delta := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} \leq 1 - \frac{z}{2}, \; y = 0, \; z > 0 \right\} = \left\{ (x,0,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, |x| \leq 1 - \frac{z}{2}, \, 0 < z < 2 \right\} \quad \textbf{[1]}$$

und

$$E := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} \leq 1 - \frac{z}{2}, \; y < 0, \; z = 0 \right\} = \left\{ (x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \, : \, \sqrt{x^2 + \frac{y^2}{4}} \leq 1, \, y < 0 \right\} \quad \textbf{[1]}$$

berandet wird.

Δ und E sind offensichtlich reguläre Flächen, M ist n. V. regulär, und F ist stetig differenzierbar. **[2]**

Somit ist der Satz von Gauß anwendbar. Es gilt

$$\int_K \operatorname{div}(F) \, \mathrm{d}V = \int_M F \cdot N \, \mathrm{d}\sigma + \int_\Delta F \cdot N_\Delta \, \mathrm{d}\sigma + \int_E F \cdot N_E \, \mathrm{d}\sigma \,, \quad \textbf{[1]}$$

wobei

$$N_\Delta = (0,1,0)^T \quad \text{bzw.} \quad N_E = (0,0,-1)^T \quad \textbf{[2]}$$

die nach außen weisenden Normalen an Δ bzw. E sind.

Weiterhin gilt $\operatorname{div}(F) \equiv 0$ und damit **[1]**

$$\int_M F \cdot N \, \mathrm{d}\sigma = -\int_\Delta -\lambda z e^{y^2} \, \mathrm{d}(x,z) - \int_E -yz^2 e^{y^2} \mathrm{d}(x,y) =: (*) \,, \lambda > 0. \quad \textbf{[1]}$$

Das letzte Integral verschwindet, da $z \equiv 0$ gilt auf E, und damit erhalten wir **[1]**

$$\begin{aligned} (*) &= \int_\Delta \lambda z e^{y^2} \, \mathrm{d}(x,z) \overset{y \equiv 0}{=\!=} \int_0^2 \int_{z/2-1}^{1-z/2} \lambda z \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z && \textbf{[2]} \\ &= 2\lambda \int_0^2 (1 - z/2) z \mathrm{d}z && \textbf{[1]} \\ &= 4/3 \cdot \lambda \,. && \textbf{[1]} \end{aligned}$$

Aufgabe 3 **[10 Punkte]**

Untersuchen Sie die Funktionenfolge $f_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} n\sin(nx), & \text{für} \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \text{für} \quad \frac{\pi}{n} < x \le \pi, \end{cases}$$

(a) auf punktweise und (b) auf gleichmäßige Konvergenz.

Lösung

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n(0) = 0$. **[1]**
Für $n \to \infty$ hat man $\frac{\pi}{n} \to 0$. Daher konvergiert f_n punktweise gegen die Nullfunktion. **[2]**

(b) Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwerts untersuchen wir die gleichmäßige Konvergenz gegen die Nullfunktion. Es liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor. Man hat mehrere Möglichkeiten das zu zeigen: **[1]**

(i) Es gilt

$$\sup_{x\in[0,\pi]} |f_n(x) - 0| = \sup_{x\in[0,\frac{\pi}{n}]} n\,|\sin(nx)| = n,$$ **[4]**

da $\sin(n \cdot \frac{\pi}{2n}) = 1$. Damit konvergiert die Folge nicht gleichmäßig. **[2]**

(ii) Wäre f_n gleichmäßig konvergent, so hätte man

$$\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$ **[2]**

Die linke Seite ist, da $f \equiv 0$ gilt, gleich Null. Für die rechte Seite erhält man **[1]**

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f_n(x)\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} n\sin(nx)\,\mathrm{d}x && [1] \\ &= \lim_{n\to\infty} -\cos(nx)\Big|_0^{\pi/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} 1 - \cos(\pi) && [1] \\ &= 2 \neq 0. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch, also kann keine gleichmäßige Konvergenz vorliegen. **[1]**

Aufgabe 4 **[11 Punkte]**

Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \sinh(x).$$

Berechnen Sie die komplexe Fourier-Reihe von F. *Hinweis:* $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$.

Lösung

Für die Fourier-Koeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,\mathrm{d}\,x \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^x - e^{-x})e^{-ikx}\,\mathrm{d}\,x && \textbf{[1]} \\
&= \frac{1}{4\pi}\Big[\frac{1}{1-ik}e^{(1-ik)x} + \frac{1}{1+ik}e^{(-1-ik)x}\Big]_{-\pi}^{+\pi} && \textbf{[2]} \\
&= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{1-ik}(e^{\pi}e^{-ik\pi} - e^{-\pi}e^{ik\pi}) + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{1+ik}(e^{-\pi}e^{-ik\pi} - e^{\pi}e^{ik\pi}) && \textbf{[1]} \\
&= \frac{(-1)^k}{2\pi}\frac{1}{2}(e^{\pi} - e^{-\pi})\Big(\frac{1}{1-ik} - \frac{1}{1+ik}\Big) && \textbf{[2]} \\
&= \frac{(-1)^k \sinh(\pi)}{2\pi}\frac{2ik}{(1-ik)(1+ik)} && \textbf{[2]} \\
&= \frac{(-1)^k ik\sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}. && \textbf{[2]}
\end{aligned}$$

Also ist die komplexe Fourier-Reihe

$$T_f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k ik\sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}e^{ikx}. \qquad \textbf{[1]}$$

Aufgabe 5 **[11 Punkte]**

Mit sechs nicht unterscheidbaren, nicht gezinkten Würfeln werfe man auf zwei unterscheidbare, gleich große Gefäße („das linke“ und „das rechte“). Jeder Würfel lande mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% in einem der beiden Gefäße. Die Ereignisse „Der Würfel landet im linken Gefäß.“ und „Der Würfel landet im rechten Gefäß.“ seien dabei für jeden Würfel gleich wahrscheinlich.

(a) Wie wahrscheinlich bleiben beide Gefäße leer? Geben Sie das Ergebnis als gekürzten Bruch an.

(b) Ist das Ereignis „Alle sechs Würfel verfehlen beide Gefäße und bleiben so liegen, dass bei jedem Würfel die Seite mit der ⚀ (‚Eins‘) oben liegt.“ wahrscheinlicher oder unwahrscheinlicher als ein Tipp von sechs Richtigen beim Lottospielen (Chance ca. 1:14.000.000)?

(c) Wie wahrscheinlich landet mindestens ein Würfel in einem der beiden Gefäße und liegt dann so, dass die Seite mit der ⚅ („Sechs“) oben liegt?

(d) Wie wahrscheinlich bleibt kein Gefäß leer?

Lösung

(a) *Wie wahrscheinlich bleiben beide Gefäße leer?*

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Würfel beide Gefäße verfehlt, ist 30%.
Da die Ereignisse „Würfel i verfehlt beide Gefäße.“, $i = 1, ..., 6$, stochastisch unabhängig sind, gilt **[1]**

$$p\left(\bigcap_{i=1}^{6} \text{„Würfel } i \text{ verfehlt beide Gefäße.“}\right) = \left(\frac{3}{10}\right)^6 = \frac{729}{1000000}\,. \qquad \textbf{[1]}$$

(b) $p($*„Kein Würfel trifft und alle zeigen ⚀.“*$) \gtrless 1/14000000$*?*

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beliebiger Würfel beide Gefäße verfehlt, ist 30%; mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$ liegt die Seite mit der ⚀ („Eins“) oben. Wegen stochastischer Unabhängigkeit ergibt sich für einen Würfel eine Wahrscheinlichkeit von 5% dafür, beide Gefäße zu verfehlen und so zu liegen, dass die Seite mit der ⚀ („Eins“) oben liegt. **[1]**

Erneut aufgrund von stochastischer Unabhängigkeit erhält man jetzt bei sechsmaliger Durchführung des Experiments als Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei jeder Durchführung das günstige Ergebnis auftaucht,

$$\left(\frac{1}{20}\right)^6 = \frac{1}{64000000} < \frac{1}{14000000}\,. \qquad \textbf{[1]}$$

Damit ist das in der Aufgabenstellung angegebene Ereignis unwahrscheinlicher als der Tipp von sechs Richtigen beim Lottospielen.

(c) *Wie wahrscheinlich landet ein Würfel in einem Gefäß und zeigt dann eine ⚅?*

Wirft man mit einem Würfel, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Gefäß zu treffen, 70%; mit der Wahrscheinlichkeit $1/6$ liegt die Seite mit der ⚅ („Sechs“) oben. Wirft man einmal, ist die Chance also

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{60}, \qquad \textbf{[1]}$$

dass das gewünschte Ereignis eintritt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Gegenereignis eintritt, ist also

$$\frac{53}{60}\,. \qquad \textbf{[1]}$$

Man wirft mit sechs Würfeln, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit, wiederum aufgrund von stochastischer Unabhängigkeit,

$$1 - \left(\frac{53}{60}\right)^6. \qquad \textbf{[1]}$$

(d) *Wie wahrscheinlich bleibt kein Gefäß leer?*

Wir führen die folgenden Kurzschreibweisen ein:

$K :=$ „Kein Gefäß bleibt leer."

$T_i :=$ „Genau i Kugeln treffen eines der beiden Gefäße."

Aus der Übung ist die Wahrscheinlichkeit dafür bekannt, dass sich k Würfel auf 2 Gefäße so verteilen, dass kein Gefäß leer bleibt, unter der Bedingung, dass auch gerade k Würfel die 2 Gefäße treffen:

$$p(K|T_k) = \frac{\sum_{j=0}^{1}(-1)^j\binom{2}{j}(2-j)^k}{2^k} = \frac{2^k-2}{2^k},\ k \geq 2,$$

bzw.

$$p(K|T_k) = 0,\ k \leq 1. \qquad [\mathbf{1}]$$

Die Ereignisse T_i bilden eine vollständige Ereignisdisjunktion und es gilt mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit: [**1**]

$p(K) = p(K|T_0)\cdot p(T_0)+...+p(K|T_6)\cdot p(T_6)$. Die Wahrscheinlichkeiten $p(T_k),\ k = 0, ..., 6$ sind, da es sich bei der Frage, ob man mit k von 6 Würfeln ein Gefäß trifft oder nicht, um ein Bernoulli-Experiment handelt, gegeben durch

$$p(T_k) = \binom{6}{k}\left(\frac{7}{10}\right)^k\left(\frac{3}{10}\right)^{6-k},\ k = 0, ..., 6. \qquad [\mathbf{1}]$$

Insgesamt erhält man für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p(K) = \sum_{k=2}^{6}\binom{6}{k}\left(\frac{7}{10}\right)^k\left(\frac{3}{10}\right)^{6-k}\cdot\frac{2^k-2}{2^k} \approx 85\%. \qquad [\mathbf{1}]$$

Alternativlösung:

$p($„Kein Gefäß bleibt leer"$) =$

$1 - p($„Das linke Gefäß bleibt leer" $\cup$ „Das rechte Gefäß bleibt leer"$) =$ [**1**]

$1 - p($„Linkes Gefäß bleibt leer"$) - p($„Rechtes Gefäß bleibt leer"$) + p($„Beide Gefäße bleiben leer"$) =$ [**1***]

$1 - p($„Alle Kugeln treffen rechtes Gefäß oder verfehlen beide Gefäße"$)$

$- p($„Alle Kugeln treffen linkes Gefäß oder verfehlen beide Gefäße"$)$

$+ p($„Alle Kugeln verfehlen beide Gefäße"$) =$ [**1**]

$1 - (35/100 + 30/100)^6 - (35/100 + 30/100)^6 + (30/100)^6 =$

$1 - 2(65/100)^6 + (30/100)^6 \approx 85\%$. [**1**]

Bemerkung: Für zwei Ereignisse A und B gilt $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$. [*]