RWTH AACHEN
Prof. Dr. Josef Bemelmans
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 1010 | 111 (Hauptgebäude)

Tel.: +49 241 80 94889
Sekr.: +49 241 80 94921
Fax: +49 241 80 92323
bemelmans@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de

B. Sc./Vordiplom
WS 2011/12

Jan./Feb. 2012
Dauer: 90 Minuten

Probeklausur: HM III

Aufgabe 1
Zeigen Sie: Die Funktion $y : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$y(x) := \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2} \frac{2}{\pi}\sqrt{t} \cdot \cos\left(\sqrt{t}-x\right)\,\mathrm{d}t\,,$$

löst die Differentialgleichung $\frac{\pi}{2}y(x) + \frac{\pi}{2}y''(x) = 2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2$.

Lösung
$f(x,t) = \frac{2}{\pi}\sqrt{t}\cdot\cos\left(\sqrt{t}-x\right)$ ist stetig differenzierbar (nach x), ebenso $\alpha(x) = 0$ und $\beta(x) = \left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2$. Also gelten wegen der Leibniz-Regel die Gleichheiten

$$\begin{aligned} y'(x) &= \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2} \frac{2}{\pi}\sqrt{t}\cdot\left(-\sin\left(\sqrt{t}-x\right)\cdot(-1)\right)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2}\cdot\cos(\frac{\pi}{2})\cdot 2\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 0 \\ &= \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2} \frac{2}{\pi}\sqrt{t}\cdot\sin(\sqrt{t}-x)\,\mathrm{d}t \ \text{ und} \\ y''(x) &= \int_0^{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2} \frac{2}{\pi}\sqrt{t}\cdot\cos(\sqrt{t}-x)\cdot(-1)\,\mathrm{d}t + \frac{2}{\pi}\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}+x\right)^2}\cdot\sin(\frac{\pi}{2})\cdot 2\left(\frac{\pi}{2}+x\right) - 0 \\ &= -y(x) + \frac{4}{\pi}(\frac{\pi}{2}+x)^2. \end{aligned}$$

Einsetzen liefert die Behauptung.

Aufgabe 2

Seien $\mathcal{F} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x^2+3y^2 \leq 1,\ z = (1-2x^2-3y^2)\cdot(x^2+y^4+5)\}$ eine reguläre Fläche und $f\,:\,\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, definiert durch

$$f(x,y,z) := \begin{pmatrix} 2x\,(\sinh(z) - e^x + y^3) \\ 3x^2y^2 + 7e^{y^2} - \cos(z) \\ e^z - 8x^2 + (\sin(y))^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie unter Zuhilfenahme des Satzes von Stokes das Integral $\int\limits_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(f)\cdot n\,\mathrm{d}\sigma$, wobei n die Normale an $\mathcal{F}$ mit positiver z-Komponente sei.

Lösung

Da das Vektorfeld f stetig differenzierbar ist in einer Umgebung von $\mathcal{F}$ und die Fläche $\mathcal{F}$ selbst regulär ist (vgl. Aufgabenstellung), ist der Satz von Stokes anwendbar.
Der Rand von $\mathcal{F}$ wird von der regulären Kurve $\partial\mathcal{F} := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x^2+3y^2 = 1\}$ beschrieben.
Ansatz: Wende den Satz von Stokes zweimal an, und berechne statt des ursprünglichen Integrals das Integral

$$\int\limits_{\mathcal{F}^*} \operatorname{rot}(f)\cdot n^*\,\mathrm{d}\sigma\,,$$

wobei $\mathcal{F}^* := \{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x^2+3y^2 \leq 1\}$ die Ellipse ist, die ebenfalls von $\partial\mathcal{F}$ berandet wird. n^* ist dann $(0,0,1)$ und es muss nur noch die dritte Komponente der Rotation berechnet werden:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 6xy^2 - 2x\cdot 3y^2 = 0.$$

Dieser Ansatz liefert also $\int\limits_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}(f)\cdot n\,\mathrm{d}\sigma = 0.$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$, mit $a < 0 < b$, den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\, dx.$$

Lösung

Die Funktionenfolge $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert durch $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$, konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion $f(x) = |x|$, denn man hat

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| \\
&= \left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right) \cdot \frac{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \\
&= \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\, dx &= \int_a^b |x|\; dx \\
&= \int_a^0 -x\, dx + \int_0^b x\, dx \\
&= \frac{1}{2}(a^2 + b^2).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4
Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die 2π-periodische Fortsetzung der Funktion $f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := e^x.$$

Berechnen Sie die komplexen und reellen Fourier-Koeffizienten von F.

Lösung
Für die komplexen Fourier-Koeffizienten erhalten wir

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-ikx} \,\mathrm{d}\, x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-ik} e^{(1-ik)x} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1-ik} (e^{\pi} e^{-ik\pi} - e^{-\pi} e^{ik\pi}) \\
&= \frac{(-1)^k}{2\pi(1-ik)} (e^{\pi} - e^{-\pi}) \\
&= \frac{(-1)^k \sinh(\pi)}{\pi(1-ik)}.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die reellen Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2c_0 = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}, \\
a_k &= c_k + c_{-k} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left(\frac{(-1)^k}{(1-ik)} + \frac{(-1)^k}{(1+ik)} \right) = \frac{2(-1)^k \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}, \\
b_k &= i(c_k - c_{-k}) = i \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \left(\frac{(-1)^k}{(1-ik)} - \frac{(-1)^k}{(1+ik)} \right) = \frac{2k(-1)^{k+1} \sinh(\pi)}{\pi(1+k^2)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Ist eine Milchkuh am Schmallenberg-Virus erkrankt, so gibt sie deutlich weniger Milch als wenn sie gesund ist; es kommen Milchrückgänge von bis zu 50% vor. In einer Herde, die aus 100 Milchkühen besteht, die im gesunden Zustand paarweise gleich viel Milch geben mögen, seien 80 dieser Tiere vom Schmallenberg-Virus befallen. Die restlichen 20 Kühe seien isoliert worden und mögen sich nicht anstecken können. Man nehme an, bei jedem erkrankten Tier sei jeder Milchrückgang gleich wahrscheinlich; die kranken Tiere mögen also zufällig zwischen 50% und 100% der Menge an Milch geben, die sie jeweils geben, wenn sie gesund sind. Geben Sie unter Zuhilfenahme des zentralen Grenzwertsatzes eine Näherung für die Wahrscheinlichkeit an, mit der der Milchbauer täglich über eine Milchmenge verfügt, die 80% oder mehr der normalen beträgt. Tägliche Schwankungen der Milchmenge sowohl bei gesunden als auch bei kranken Kühen sollen nicht berücksichtigt werden.

Lösung

X_i sei die Zufallsvariable, die der i-ten Kuh den Bruchteil der Milch zuordne, den sie täglich gibt, wenn Sie gesund ist; die Kühe 1 bis 80 seien erkrankt. Damit alle Kühe zusammen 80% oder mehr der normalen Milchmenge geben, müssen die kranken Kühe 60 der 80 Einheiten Milch geben, die sie geben, wenn sie gesund sind:

$$\sum_{i=1}^{100} X_i \geq 80 \ \wedge \ \sum_{i=81}^{100} X_i = 20 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{80} X_i \geq 60\,.$$

Für alle $X_i,\ i = 1, ..., 80$, sind

$$F_{X_i}(t) = \begin{cases} 0, & t < 1/2, \\ 2t-1, & 1/2 \leq t < 1, \\ 1, & 1 \leq t, \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion,

$$f_{X_i}(t) = \frac{\partial F_{X_i}(t)}{\partial t} = \begin{cases} 0, & t < 1/2, \\ 2, & 1/2 \leq t < 1, \\ 0, & 1 \leq t, \end{cases}$$

die Dichte,

$$\mathrm{E}(X_i) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_{X_i}(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1/2}^{1} 2t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}$$

der Erwartungswert und

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{E}(X_i^2) - (\mathrm{E}(X_i))^2 = \int_{1/2}^{1} 2t^2\,\mathrm{d}t - \frac{9}{16} = \frac{1}{48}$$

die Varianz.

Da die $X_i,\ i = 1, ..., 80$, i.i.d. („independent and identically distributed“, d.h. gleichverteilt und unabhängig) sind, sind bei der Summenvariablen $S := \sum_{i=1}^{80} X_i$ der Erwartungswert $\mathrm{E}(S) = 60$ und die Varianz $\mathrm{Var}(S) = 10/6$.

Gesucht ist jetzt $p(S \geq 60)$ bzw., nach Standardisierung der Zufallsvariablen,

$$p((S-60)/\sqrt{10/6} \geq 0) = 1 - p((S-60)/\sqrt{10/6} < 0) \approx 1 - \Phi(0) = 1/2.$$