Univ.-Prof. Dr. S. Maier-Paape

Institut für Mathematik
RWTH Aachen University

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

Institut für Mathematik

Telefon: +49 241 - 80 94925
Fax: +49 241 - 80 94923
Adresse: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
D –52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik III (Wdh.) (Bachelor / Vordiplom)
Sommersemester 2011, 22.08.2011
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Aufgabe 1: **[*12 Punkte*]**

Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen auf gleichmäßige Konvergenz:

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. **b)** $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g_n(x) = \arctan(nx)$.

Aufgabe 2: **[*15 Punkte*]**

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei folgendes Kurvenintegral gegeben:

$$\int_\Gamma f_\alpha d\gamma,$$

wobei $f_\alpha(x,y) = \left(2\alpha xy - 2\tan\left(\frac{y}{2}\right) - 2|x|y^3, -3(e^{-3y} + x|x|y^2) + 3x^2 - x - x\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)$, $(x,y) \in (-\pi,\pi)^2$.

a) Überprüfen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ zu f_α eine Potentialfunktion $F_\alpha : (-\pi,\pi)^2 \to \mathbb{R}$ existiert; geben Sie diese an.

b) Berechnen Sie $\int_\Gamma f_3 d\gamma$ und $\int_\Gamma f_1 d\gamma$ für die Kurve

$$\begin{aligned}
\Gamma &= \Gamma_1 \cup \Gamma_2,\\
\Gamma_1 &= \mathrm{Graph}(\gamma_1), \quad \gamma_1 : [-\tfrac{\pi}{2}, 0] \to (-\pi,\pi)^2,\ t \mapsto (t, -\tfrac{\pi}{2})\\
\Gamma_2 &= \mathrm{Graph}(\gamma_2), \quad \gamma_2 : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to (-\pi,\pi)^2,\ t \mapsto (0, t),
\end{aligned}$$

welche vom Punkt $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ über $(0, -\frac{\pi}{2})$ zum Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ verläuft.

Aufgabe 3: **[*12 Punkte*]**

Gegeben sei das Rotationsparaboloid $\mathcal{P} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, 0 \le z \le 1\right\}$.
Das stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch $f(x,y,z) := \left(x^2 - y^2 z, xz^2 - yz, -2xz + z^2\right)$.
Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass gilt

$$\int_{\mathcal{P}} \langle f, N \rangle \, do = -\frac{2}{3}\pi\,,$$

wobei N das äußere Normalenfeld an $\mathcal{P}$ bezeichne.

Aufgabe 4: **[*6 Punkte*]**

Zeigen Sie:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nabla f(x_0)\| \neq 0$. Dann gilt für alle Richtungen $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\|\nu\| = 1$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)\right| \le \left|\frac{\partial f}{\partial \nu_0}(x_0)\right|, \text{wobei } \nu_0 := \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}.$$

Aufgabe 5: **[*9 Punkte*]**

Die fünf Studierenden Tim, Tom, Tam, Tem und Tum wollen die Vorlesungen „Experimentalphysik", „Theoretische Physik" und „Höhere Mathematik" hören, und beschließen, dass an jeder Vorlesung mindestens einer von ihnen teilnehmen soll.

a) Wieviele Möglichkeiten haben die Studierenden, sich auf die Vorlesungen zu verteilen, wenn diese nacheinander stattfinden?

b) Wieviele Möglichkeiten sich zu verteilen haben sie, wenn die Vorlesungen zeitgleich stattfinden und jeder der fünf Studierenden genau eine Vorlesung besucht?

V i e l E r f o l g !