Aufgabe (glm. Konvergenz) *(6+6 Punkte)*

Untersuchen Sie die angegebenen Funktionenfolgen auf gleichmäßige Konvergenz.

a) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ **(6 Punkte)**

b) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit $f_n(x) = \arctan(nx)$ **(6 Punkte)**

Lösungsvorschlag:

zu a): Behauptung: $g_n \to g$, glm. wobei $g(x) = |x|$.
Man hat

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} && \textbf{(1 Punkt)} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right) && \textbf{(1 Punkt)} \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}, && \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x) - g(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{n}}, && \textbf{(2 Punkte)} \\ \Rightarrow \|g_n - g\|_\infty &\xrightarrow[n\to\infty]{} 0. && \textbf{(1 Punkt)} \end{aligned}$$

Alternative: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig, dann wähle $n_0 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$. **(1 Punkt)**
Dann gilt für alle $n \geq n_0$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ **(2 Punkte)**

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g(x)| &= \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} && \textbf{(1 Punkt)} \\ &= \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \right) && \textbf{(1 Punkt)} \\ &\leq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} && \textbf{(1 Punkt)} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da n_0 nicht von x abhängt, folgt die gleichmäßige Konvergenz.

zu b): Die Folge konvergiert nicht gleichmäßig. Für festes $x > 0$ gilt $nx \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.
Damit folgt **(1 Punkt)**

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = \frac{\pi}{2}.$$

Analog erhält man für festes $x < 0$ **(1 Punkt)**

$$\lim_{n\to\infty} \arctan(nx) = -\frac{\pi}{2}.$$

Außerdem hat man $f_n(0) = \arctan(0) = 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Damit konvergiert die Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ punktweise gegen die Funktion f, mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0 \end{cases}$$ **(1 Punkt)**

Da die Grenzfunktion f nicht stetig ist, aber jedes f_n stetig ist, kann die Folge nicht gleichmäßig konvergieren. **(3 Punkte)**

Alternative: Man bestimmt wie oben die punktweise Grenzfunktion f. **(3 Punkte)**
Nun zeigt man: **(1 Punkt)**

$$\exists\, \varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists n \geq n_0, x_0 \in \mathbb{R} \text{ so dass } |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

Nun wähle $\varepsilon = \frac{\pi}{4}$, und $x_0 = \frac{1}{n}$. Dann gilt **(1 Punkt)**

$$\begin{aligned} |f_n(x_0) - f(x_0)| &= |\arctan(n\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n})| = |\arctan(1) - \frac{\pi}{2}| \\ &= |\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}| = \frac{\pi}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$ **(1 Punkt)**

Aufgabe 1: **[*15 Punkte*]**

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei folgendes Kurvenintegral gegeben:

$$\int_\Gamma f_\alpha d\gamma,$$

wobei $f_\alpha(x,y) = \left(2\alpha xy - 2\tan\left(\frac{y}{2}\right) - 2|x|y^3, -3(e^{-3y} + x|x|y^2) + 3x^2 - x - x\tan^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)$, $(x,y) \in (-\pi,\pi)^2$.

a) Überprüfen Sie, für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ zu f_α eine Potentialfunktion $F_\alpha : (-\pi,\pi)^2 \to \mathbb{R}$ existiert; geben Sie diese an.

b) Berechnen Sie $\int_\Gamma f_3 d\gamma$ und $\int_\Gamma f_1 d\gamma$ für die Kurve

$$\begin{aligned}
&\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \\
&\Gamma_1 = \mathrm{Graph}(\gamma_1), \quad \gamma_1 : [-\tfrac{\pi}{2}, 0] \to (-\pi,\pi)^2,\ t \mapsto (t, -\tfrac{\pi}{2}) \\
&\Gamma_2 = \mathrm{Graph}(\gamma_2), \quad \gamma_2 : [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \to (-\pi,\pi)^2,\ t \mapsto (0, t),
\end{aligned}$$

welche vom Punkt $(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$ über $(0, -\frac{\pi}{2})$ zum Punkt $(0, \frac{\pi}{2})$ verläuft.

Lösung: a) 2. Hauptsatz über Kurvenintegrale nicht anwendbar, da f_α keine C^1-Funktion. Suche nun $F_\alpha \in C^1$ mit $\nabla F_\alpha = f_\alpha$. **(1)**

$$\begin{aligned}
\int f_{\alpha,1}(x,y)dx &= \int 2\alpha xy - 2\tan\left(\frac{y}{2}\right) - 2|x|y^3 dx \qquad \textbf{(3)}\\
&= \begin{cases} \int 2\alpha xy - 2\tan\left(\frac{y}{2}\right) - 2xy^3 dx, & x \geq 0 \\ \int 2\alpha xy - 2\tan\left(\frac{y}{2}\right) + 2xy^3 dx, & x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \alpha x^2 y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) - x^2y^3 + c(y), & x \geq 0 \\ \alpha x^2 y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) + x^2y^3 + c(y), & x < 0 \end{cases} \\
&= \alpha x^2 y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) - x|x|y^3 + c(y) \\
&=: \tilde{F}(x,y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int f_{\alpha,2}(x,y)dy &= \int -3(e^{-3y} + x|x|y^2) + 3x^2 - x\left(1 + \tan^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)\, dy \qquad \textbf{(4)}\\
&= \begin{cases} \int -3e^{-3y} - 3x^2y^2 + 3x^2 - x\left(1 + \tan^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)\, dy, & x \geq 0 \\ \int -3e^{-3y} + 3x^2y^2) + 3x^2 - x\left(1 + \tan^2\left(\frac{y}{2}\right)\right)\, dy, & x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-3y} - x^2y^3 + 3x^2y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) + c(x), & x \geq 0 \\ e^{-3y} + x^2y^3 + 3x^2y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) + c(x), & x < 0 \end{cases} \\
&= e^{-3y} - x|x|y^3 + 3x^2y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) + c(x) \\
&=: \hat{F}(x,y)
\end{aligned}$$

Vergleiche $\tilde{F}$ und $\hat{F}$:

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}(x,y) = \hat{F}(x,y) && \textbf{(2)}\\
\Leftrightarrow\ &\alpha x^2 y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) - x|x|y^3 + c(y) = e^{-3y} - x|x|y^3 + 3x^2y - 2x\tan\left(\frac{y}{2}\right) + c(x)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha x^2 y + c(y) = e^{-3y} + 3x^2 y + c(x)\\
\Rightarrow\ &\alpha = 3 \text{ und } c(y) = e^{-3y} + c_1, \quad c(x) = c_2
\end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$; ohne Einschränkung setze $c_1 = c_2 = 0$.

$\Rightarrow$

$$F(x,y) = 3x^2y - 2x\tan(\frac{y}{2}) - x|x|y^3 + e^{-3y}$$

erfüllt $\nabla F = f_\alpha$ und ist nach Konstruktion stetig diffbar, da f_α stetig. **(1)**

b) $\int_\Gamma f_3 d\gamma$ ist wegunabhängig nach Teil a) und dem ersten Hauptsatz über Kurvenintegrale. Nach diesem gilt mit F aus a)

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f_3 d\gamma &= F(0,\frac{\pi}{2}) - F(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \\ &= e^{-\frac{3\pi}{2}} - \left[3\frac{\pi^2}{4}\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \pi\tan(\frac{-\pi}{4}) - \left(-\frac{-\pi^2}{4}\right)\left(-\frac{\pi^3}{8}\right) + e^{\frac{3\pi}{2}}\right] \\ &= -2\sinh(\frac{3\pi}{2}) + \frac{\pi^5}{32} + \frac{3\pi^3}{8} + \pi\end{aligned} \quad \mathbf{(2)}$$

Es gilt: $\gamma_1'(t) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \gamma_2'(t) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ und damit

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f_1 d\gamma &= \int_{\Gamma_1} f_1 d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} f_1 d\gamma_2 \\ &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \langle f_1(t,-\frac{\pi}{2}), \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\rangle dt + \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \langle f_1(0,t), \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\rangle dt \\ &= \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} 2t\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 2\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2t\left(-\frac{\pi^3}{8}\right) dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} -3e^{-3t} dt \\ &= -\pi\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2\right] + 2\left[-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] - \frac{\pi^3}{4}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right] + \left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2\right] + \left[e^{-\frac{3\pi}{2}} - e^{\frac{3\pi}{2}}\right] \\ &= \pi + \frac{\pi^3}{8} + \frac{\pi^5}{32} - 2\sinh(\frac{3\pi}{2})\end{aligned} \quad \mathbf{(2)}$$

Aufgabe 3 *(12 Punkte)*

Gegeben sei das Rotationsparaboloid

$$\mathcal{P} := \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z, 0 \leq z \leq 1\right\}$$

Das stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(x, y, z) := \left(x^2 - y^2 z, xz^2 - yz, -2xz + z^2\right).$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes, dass gilt

$$\int_{\mathcal{P}} \langle f, N\rangle \, do = -\frac{2}{3}\pi.$$

wobei N das äußere Normalenfeld an $\mathcal{P}$ bezeichne.

Lösung: Es sei

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &:= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z, 0 < z < 1\right\} \\ K &:= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < z, z = 1\right\} \end{aligned}$$

Mit Gauß gilt ($\mathcal{V}$ beschränkt, zwei reguläre Randflächen K,$\mathcal{P}$) (1)

$$\int_P \langle f, N\rangle \, do = \int_{\mathcal{V}} \mathrm{div} f dV - \int_K \langle f, N\rangle \, do \qquad (3)$$

Es gilt für $z = 1$, dass $N = (0, 0, 1)$, so dass (1)

$$\begin{aligned} \int_K \langle f, N\rangle \, do &= \int_K -2x + 1 do = \int_0^{2\pi} \int_0^1 -2r^2 cos(\varphi) + r dr d\varphi \\ &= 0 + \pi = \pi \qquad (2) \end{aligned}$$

weiter ist $\mathrm{div} f = z$ und (1)

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} z dV &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^1 r\rho d\rho dr d\varphi \qquad (3) \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{2} r - \frac{1}{2} r^4 dr d\varphi \\ &= \frac{1}{6} 2\pi = \frac{1}{3}\pi. \qquad (1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Beh.

Aufgabe 4: (6 Punkte)

Zeigen Sie:

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $\|\nabla f(x_0)\| \neq 0$. Dann gilt für alle Richtungen $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial v_0}(x_0)\right| \text{, wobei } v_0 := \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}.$$

Lösung: Anwendung der Cauchy-Schwarz Ungleichung ergibt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| \overset{(1)}{=} |\nabla f(x_0) \cdot v| \overset{(1)}{\leq} \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|v\| \overset{(1)}{=} \|\nabla f(x_0)\|.$$

Ausserdem gilt

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v_0}(x_0)\right| \overset{(1)}{=} \frac{\nabla f(x_0) \cdot \nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} = \frac{\|\nabla f(x_0)\|^2}{\|\nabla f(x_0)\|} \overset{(1)}{=} \|\nabla f(x_0)\|.$$

Zusammen liefert dies

$$\left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| \leq \|\nabla f(x_0)\| = \left|\frac{\partial f}{\partial v_0}(x_0)\right|.$$

Aufgabe 5: (12 Punkte)

Die fünf Studierenden Tim, Tom, Tam, Tem und Tum wollen die Vorlesungen „Experimentalphysik“, „Theoretische Physik“ und „Höhere Mathematik“ hören, und beschließen, dass an jeder Vorlesung mindestens einer von ihnen teilnehmen soll.

a) Wieviele Möglichkeiten haben die Studierenden, sich auf die Vorlesungen zu verteilen, wenn diese nacheinander stattfinden?

b) Wieviele Möglichkeiten sich zu verteilen haben sie, wenn die Vorlesungen zeitgleich stattfinden und jeder der fünf Studierenden genau eine Vorlesung besucht?

Lösung:

zu a) Betrachte z.B. ExpPhy:

Es können $k \in \{1, \cdots, 5\}$ Studenten an der Vorlesung teilnehmen und es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten diese k Studenten aus allen $n = 5$ zu wählen (ohne Wiederholung, ohne Reihenfolge):

k	#Möglichkeiten
1	5
2	10
3	10
4	5
5	1

Insgesamt also $5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ Möglichkeiten, 1 bis 5 Studenten auf 1 Vorlesung zu verteilen **(2 Punkte)**

Nun gibt es 3 Vorlesungen, die alle nacheinander liegen. Es gibt also für jede, 31 Möglichkeiten eine Gruppe (von 1 bis 5) Studenten zusammenzustellen. Für jede Vorlesung wählen wir jetzt eine dieser 31 Möglichkeiten aus. Dies geschieht mit Zurücklegen (Es darf auch in 2 oder mehr Vorlesungen die gleichen Gruppe sitzen) und mit Reihenfolge (Vorlesungen unterscheidbar, d.h. es macht einen unterschied, ob eine Gruppe in ExpPhy oder HöMa sitzt):

Insgesamt haben die Studenten somit $31^3 = 29791$ Möglichkeiten, sich auf die Vorlesungen zu verteilen. **(2 Punkte)**

zu b) In jeder Vorlesung muss mindestens 1 Student sein und jeder Student geht zu genau 1 Vorlesung. Fallunterscheidung: **(1 Punkte)**

Fall 1: In einer der Vorleungen sitzen 3 Studenten (in den beiden anderen jeweils 1).

Es gibt 3 unterscheidbare Vorlesungen. Wähle also zunächst die Vorlesung aus, in der 3 Studenten sitzen	$\rightarrow$	3 Möglichkeiten
Die Studenten sind ebenfalls unterscheidbar. Wähle zunächst die 3 Studenten für die “volle” Vorlesung	$\rightarrow$	$\binom{5}{3} = 10$ Möglichkeiten
Der nächste Student kann noch zwischen den beiden übrigen Vorlesungen wählen, der letzte hat keine Wahl	$\rightarrow$	$2 \cdot 1$ Möglichkeiten

$\Rightarrow$ $3 \cdot 10 \cdot 2 = 60$ Möglichkeiten **(2 Punkte)**

Fall 2: In zwei Vorlesungen sitzen 2 Studenten (in der letzten 1)

Es gibt 3 unterscheidbare Vorlesungen. Wähle also zunächst die Vorlesungen aus, in denen 2 Studenten sitzen	$\rightarrow$	3 Möglichkeiten
Die Studenten sind ebenfalls unterscheidbar. Wähle zunächst die 2 Studenten für die 1. Vorlesung	$\rightarrow$	$\binom{5}{2} = 10$ Möglichkeiten
Wähle nun die Studenten für die 2. Vorlesung	$\rightarrow$	$\binom{3}{2} = 3$ Möglichkeiten
Die letzte Vorlesung und der letzte Student stehen dann fest	$\rightarrow$	1 Möglichkeit

$\Rightarrow$ $3 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 1 = 90$ Möglichkeiten **(2 Punkte)**

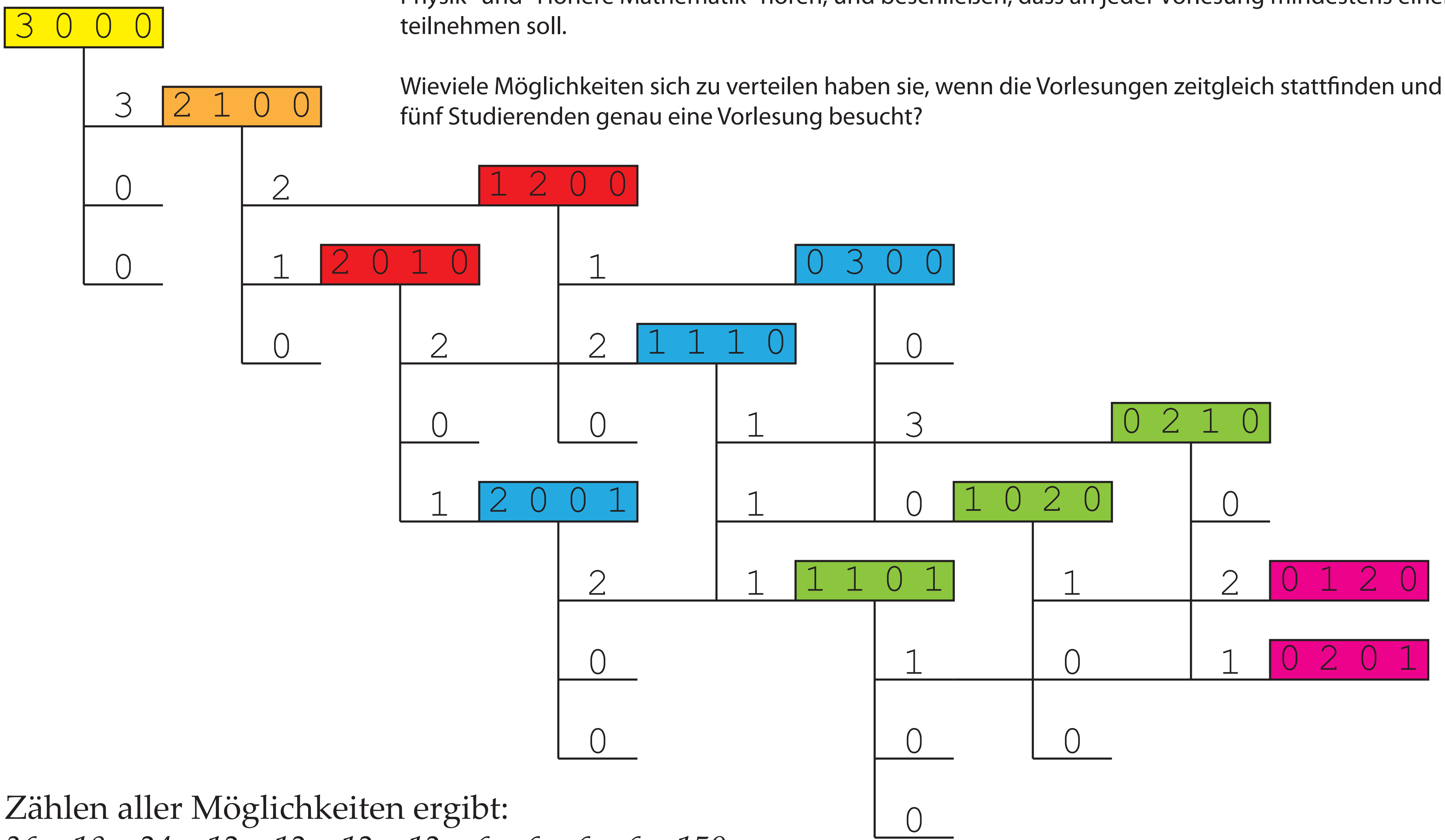
Insgesamt haben die Studenten 150 Möglichkeiten sich auf die Vorlesungen zu verteilen.

Erläuterungen zur Punkteverteilung:

Die **(2 Punkte)** enthalten jeweils 1 Punkt für das Anwenden der richtigen (Kombinatorik-)Grundaufgabe ($\binom{n}{k}$, bzw n^k) und 1 Punkt für das Ergebnis. zu b): Bei Lösung über Baumdiagramm entsprechende Punkte für Fallunterscheidung und Teilergebnisse.

Die fünf Studierenden Tim, Tom, Tam, Tem und Tum wollen die Vorlesungen "Experimentalphysik", "Theoretische Physik" und "Höhere Mathematik" hören, und beschließen, dass an jeder Vorlesung mindestens einer von ihnen teilnehmen soll.

Wieviele Möglichkeiten sich zu verteilen haben sie, wenn die Vorlesungen zeitgleich stattfinden und jeder der fünf Studierenden genau eine Vorlesung besucht?



Zählen aller Möglichkeiten ergibt:

36 + 18 + 24 + 12 + 12 + 12 + 12 + 6 + 6 + 6 + 6 = 150.

Reihenfolge der Summanden entspricht der der Pfade, die durch Beachten der Regel „Erst rechts, dann runter!“ entsteht.

Legende:

a b c d

x

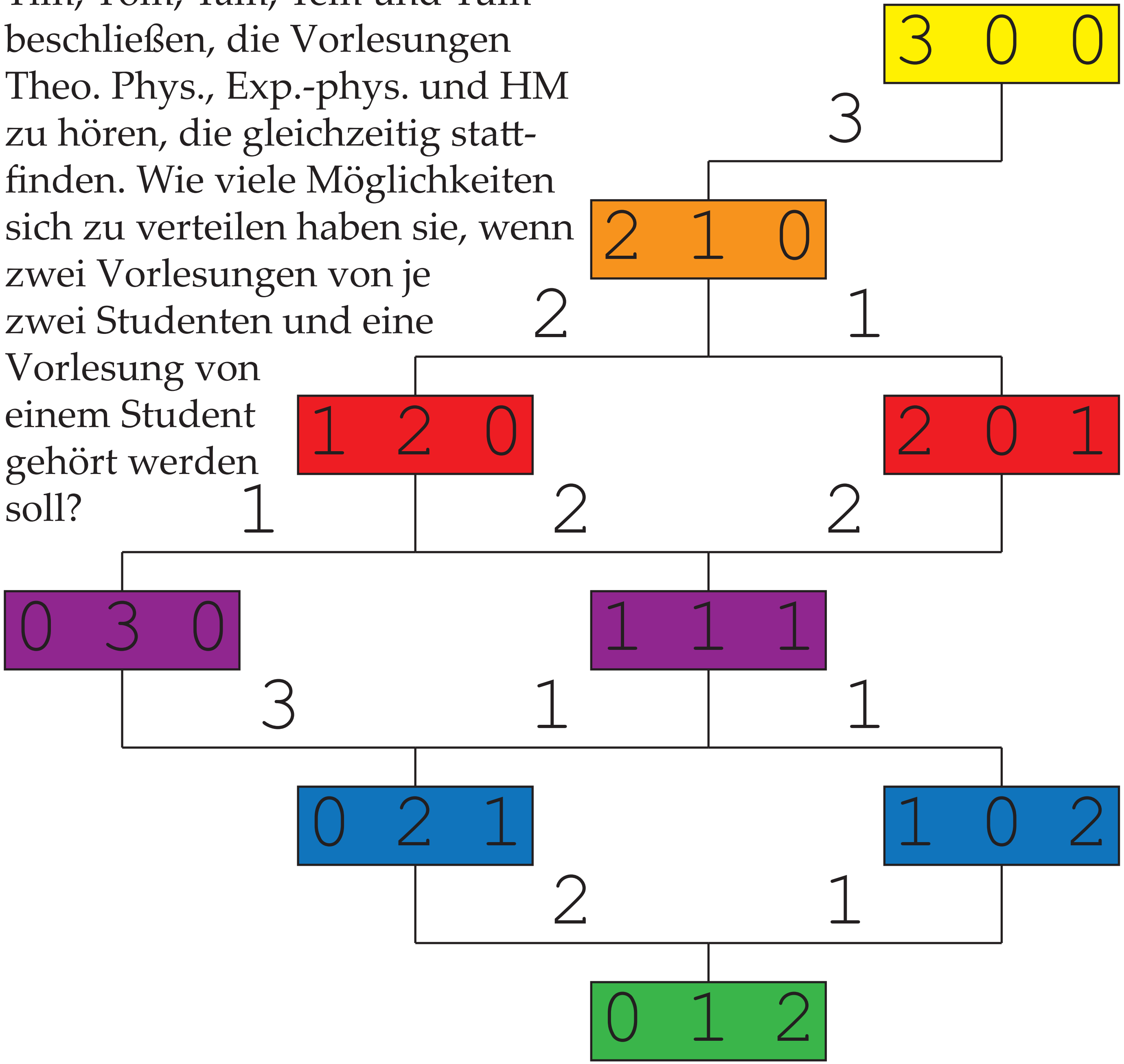
y

z

a: Anzahl der Vorlesungen mit 0 Studenten.
b: Anzahl der Vorlesungen mit 1 Student.
c: Anzahl der Vorlesungen mit 2 Studenten.
d: Anzahl der Vorlesungen mit 3 Studenten.
x: Anzahl der Möglichkeiten für Student, Vorlesung mit bisher 0 Hörern zu wählen.
y: Anzahl der Möglichkeiten für Student, Vorlesung mit bisher 1 Hörer zu wählen.
z: Anzahl der Möglichkeiten für Student, Vorlesung mit bisher 2 Hörern zu wählen.

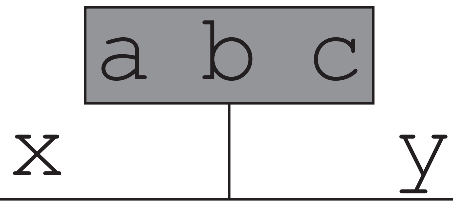
Niemand hat eine VL gewählt.
Tim hat eine VL gewählt.
Tim und Tom haben eine VL gewählt.
Tim, Tom und Tam haben ein VL gewählt.
Nur Tum hat noch keine VL gewählt.
Jeder hat eine VL gewählt.

Tim, Tom, Tam, Tem und Tum beschließen, die Vorlesungen Theo. Phys., Exp.-phys. und HM zu hören, die gleichzeitig stattfinden. Wie viele Möglichkeiten sich zu verteilen haben sie, wenn zwei Vorlesungen von je zwei Studenten und eine Vorlesung von einem Student gehört werden soll?



Antwort:
36 + 24 + 12 + 12 + 6 = 90.
Die Reihenfolge der Summanden entspricht der der Pfade, die durch Beachten der Regel „Links vor rechts!“ entsteht.

Legende:



a: # VLen mit 0 Stud.; b: # VLen mit 1 Stud.;
c: # VLen mit 2 Stud.;
x: # Möglichk., in leere VL zu gehen;
y: # Möglichk., in VL mit schon 1 Stud. zu gehen.

- Niemand hat eine VL gewählt.
- Tim hat eine VL gewählt.
- Tim und Tom haben eine VL gewählt.
- Tim, Tom und Tam haben ein VL gewählt.
- Nur Tum hat noch keine VL gewählt.
- Jeder hat eine VL gewählt.