Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Institut für Mathematik, RWTH Aachen
maier@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: +49(0)241-8094925
Fax: +49(0)241-8092323
Sekr.: +49(0)241-8094921
+49(0)241-8094922
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Klausur Höhere Mathematik III (Bachelor / Vordiplom)
WS 2010/2011
Bearbeitungszeit: 90 Minuten

---

1. Aufgabe *(12 Punkte)*
Gegeben sei das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch

$$f(x,y) := \left(x\log(y^2+1) - 12x^2 + 8xy,\ \frac{x^2 y}{y^2+1} + 4x^2 - y\sin(y) \right)$$

und die ebene Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, parametrisiert durch $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(t) := (1+\cos(t), \sin(t))\,.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int\limits_{\Gamma} f \cdot d\gamma\,.$$

2. Aufgabe *(12 Punkte)*
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \log(1+x^2+y^2) + xy\,.$$

a) Bestimmen Sie die kritischen Punkte von f.

b) Untersuchen Sie, um welche Art von Extremalstellen es sich handelt.

3. Aufgabe *(8 Punkte)*
Beweisen Sie die Besselsche Ungleichung: Sei $f \in L^2(0,2\pi)$ und $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem von $L^2(0,2\pi)$, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \ell_n \rangle^2_{L^2(0,2\pi)} \leq ||f||^2_{L^2(0,2\pi)}\,.$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $0 \leq ||f - S_{f,N}||^2_{L^2(0,2\pi)}$ mit

$$S_{f,N}(x) = \sum_{n=1}^{N} \langle f, \ell_n \rangle_{L^2(0,2\pi)} \cdot \ell_n(x), \quad x \in (0,2\pi)\,.$$

Bitte wenden!!!

4. Aufgabe *(12 Punkte)*

Gegeben sei das Rotationsparaboloid

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 2z,\ z < 2\right\}$$

wobei die Flächennormale $N \in \mathbb{R}^3$ nach außen gerichtet sei, d.h. negative z-Komponente habe. Das stetig differenzierbare Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f(x,y,z) := \frac{1}{3}(x^2 - 2yz,\ xz - yz,\ xy + y^2)\,.$$

a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} f$.

b) Geben Sie eine Parametrisierung der Randkurve $\partial\mathcal{F}$ an, so dass deren Umlaufsinn mit der Flächennormalen N eine Rechtsschraube bildet.

c) Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} f, N\rangle \, do\,.$$

5. Aufgabe *(10 Punkte)*

Gegeben seien 2 Säcke mit je 10 Äpfeln. Sack 1 enthalte 3 faule Äpfel und Sack 2 enthalte 4 faule Äpfel. Die Übrigen seien nicht faul.

a) Man wähle zufällig einen Sack aus und nehme nacheinander 2 Äpfel heraus ohne sie zurückzulegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Äpfel nicht faul sind?

b) Sei A das Ergeignis (aus Aufgabenteil **a)**):
"Beide Äpfel aus dem zufällig gewählten Sack sind nicht faul"
und B das Ereignis:
"Der 1. Apfel aus dem zufällig gewählten Sack ist nicht faul".

Prüfen Sie ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.