RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc.
WiSe 2015/2016

Klausur: Höhere Mathematik III

03.03.2016
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1

Es seien $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine Raumkurve, parametrisiert durch $\gamma\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) := \Big(\cos(t),\ 2\cdot\sin(t),\ t\Big)$, und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit $f(x,y,z) := (1,\ x\cdot y,\ 4x^2+y^2+z)$.
Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int\limits_\Gamma f\cdot \mathrm{d}\gamma\,.$

Lösung

Die Parametrisierung der Kurve ist regulär.
(Komponentenfunktionen stetig differenzierbar, $\gamma_3(t) = t$ garantiert $\|\gamma(t)'\| > 0$ und Doppelpunktfreiheit.)
Das Vektorfeld ist in einer Umgebung der Kurve stetig, da die Komponentenfunktionen Polynome sind.
Damit gilt:

$$\int\limits_\Gamma f\cdot \mathrm{d}\gamma = \int\limits_0^\pi f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,\mathrm{d}t = (*).$$

Weiter gilt:

$$f(\gamma(t)) = (1, 2\sin(t)\cos(t), 4+t)$$

und

$$\gamma'(t) = (-\sin(t), 2\cos(t), 1).$$

Damit hat man

$$\begin{aligned}
(*) &= \int\limits_0^\pi -\sin(t) + 4\sin(t)\cos^2(t) + (4+t)\,\mathrm{d}t \\
&= [\cos(t)]_0^\pi - \left[\frac{4}{3}\cos^3(t)\right]_0^\pi + \left[4t + \frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi \\
&= -2 + \frac{8}{3} + 4\pi + \frac{\pi^2}{2} \\
&= \frac{\pi^2}{2} + 4\pi + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Gegeben seien der Hohlzylinder $G := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4 < x^2 + y^2 < 9\,,\ -1 < z < 1 \right\}$ und das Vektorfeld $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x,y,z) := \left(y,\ -x,\ \left(x^2 - y\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{z^2\ -\ 2}\right) \right)$.

Berechnen Sie z.B. mithilfe des Satzes von Gauß das Integral $\int\limits_G \operatorname{div}(f)\ \mathrm{d}(x,y,z)\,.$

Lösung

Der Rand von G setzt sich aus den (endlich vielen) regulären Flächenstücken $\partial G = D_1 \cup D_2 \cup M_1 \cup M_2$ zusammen, wobei

$$\begin{aligned} D_1 &:= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ z = 1 \right\}, \\ D_2 &:= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9,\ z = -1 \right\}, \\ M_1 &:= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 9,\ -1 < z < 1 \right\} \text{ und} \\ M_2 &:= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 4,\ -1 < z < 1 \right\}. \end{aligned}$$

Die äußeren Einheitsnormalen sind gegeben durch
$N_{D_1} := (0,0,1)^T$,
$N_{D_2} := (0,0,-1)^T$,
$N_{M_1} := \frac{1}{3}(x,y,0)^T$ und
$N_{M_2} := -\frac{1}{2}(x,y,0)^T$.
Es ist f ein stetig differenzierbares Vektorfeld und es folgt mit dem Satz von Gauß

$$\begin{aligned} \int_G \operatorname{div}(f)\ \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{\partial G} \langle f, N \rangle\ \mathrm{do} \\ &= \int_{D_1} \langle f, N_{D_1} \rangle\ \mathrm{do} + \int_{D_2} \langle f, N_{D_2} \rangle\ \mathrm{do} \\ &\quad + \int_{M_1} \langle f, N_{M_1} \rangle\ \mathrm{do} + \int_{M_2} \langle f, N_{M_2} \rangle\ \mathrm{do} \\ &=: I_{D_1} + I_{D_2} + I_{M_1} + I_{M_2}. \end{aligned}$$

Es ist f senkrecht zu N_{M_1} und N_{M_2} und folglich $I_{M_1} = I_{M_2} = 0$.
Weiter ist f symmetrisch in der z-Komponente, d.h. $f(x,y,z) = f(x,y,-z)$, woraus $I_{D_1} = -I_{D_2}$ folgt.
Insgesamt folgt damit

$$\int_G \operatorname{div}(f)\ \mathrm{d}(x,y,z) = 0.$$

Aufgabe 3
Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei 2π–periodische Funktionen, definiert durch $f(x) := \cosh(x)$ und $g(x) := f'(x)$ für $-\pi \leq x < \pi$.
(a) Bestimmen Sie die komplexe Fourier–Reihe von f. **Hinweis:** $\cosh(x) = \big(e^x + e^{-x}\big)/2$.
(b) Wie lauten die reellen Fourier–Koeffizienten von f und g?

Lösung
(a) Die komplexe Fourier-Reihe S_f von f ist gegeben durch

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

mit den Fourier-Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$. Für $n = 0$ gilt:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh(x)dx = \frac{1}{2\pi} \sinh(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}.$$

Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x e^{-inx} dx + \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-x} e^{-inx} dx \\
&= \frac{1}{4\pi(1-in)} e^{(1-in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{4\pi(1+in)} e^{-(1+in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{4\pi(1-in)} \Big(\underbrace{e^{(1-in)\pi}}_{=(-1)^n e^{\pi}} - \underbrace{e^{-(1-in)\pi}}_{=(-1)^n e^{-\pi}} \Big) - \frac{1}{4\pi(1+in)} \Big(\underbrace{e^{-(1+in)\pi}}_{=(-1)^n e^{-\pi}} - \underbrace{e^{(1+in)\pi}}_{=(-1)^n e^{\pi}} \Big) \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)} \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}_{=\sinh(\pi)} + \frac{(-1)^n}{2\pi(1+in)} \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}_{=\sinh(\pi)} \\
&= \frac{(-1)^n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}.
\end{aligned}$$

(b) Die reellen Fourier-Koeffizienten von f erhalten wir durch die folgenden Relationen:

$$a_0 = 2c_0 \overset{(a)}{=} \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}, \qquad a_n = c_n + c_{-n} \overset{(a)}{=} \frac{(-1)^n 2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n}) \overset{(a)}{=} 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Im Falle der Alternative für (a) haben wir diese bereits bestimmt. Die reelle Fourier-Reihe von g sei nun gegeben durch

$$S_g(x) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{a}_n \cos(nx) + \widetilde{b}_n \sin(nx),$$

mit den reellen Fourier-Koeffizienten $\widetilde{a}_n, n \in \mathbb{N}_0$ und $\widetilde{b}_n, n \in \mathbb{N}$. Da f stetig auf $\mathbb{R}$ und g stückweise stetig ist, ist $\widetilde{a}_0 = 0$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\widetilde{a}_n = nb_n = 0, \qquad\qquad \widetilde{b}_n = -na_n = \frac{(-1)^{n+1} 2n \sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}.$$

Lösungsalternative ((a) & (b) kombiniert)
Wir berechnen zunächst die reellen Fourier-Koeffizienten. Es gilt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh(x)dx = \frac{1}{\pi}\sinh(x)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx &= \int_{-\pi}^{\pi}\cosh(x)\cos(nx)dx\\ &\overset{\text{p.I.}}{=} \underbrace{\sinh(x)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=(-1)^n 2\sinh(\pi)} + n\int_{-\pi}^{\pi}\sinh(x)\sin(nx)dx\\ &\overset{\text{p.I.}}{=} (-1)^n 2\sinh(\pi) + n\underbrace{\cosh(x)\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - n^2\int_{-\pi}^{\pi}\cosh(x)\cos(nx)dx.\end{aligned}$$

Durch Umstellen der obigen Gleichung erhalten wir somit:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cosh(x)\cos(nx)dx = \frac{(-1)^n 2\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}.$$

Da f symmetrisch zur y-Achse ist, gilt $b_n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
Die komplexe Fourierreihe von f ist nun gegeben durch

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

wobei wir die komplexen Fourier-Koeffizienten durch die folgenden Relationen erhalten:

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{2}a_0 = \frac{\sinh(\pi)}{\pi}\\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{(-1)^n\sinh(\pi)}{\pi(1+n^2)}, \quad n \in \mathbb{N},\\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = c_n, n \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten für g berechnen sich wie oben bei $(\star)$.

Aufgabe 4

Es sei $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^4 + 1 \le x^2 + y^2 + 2z^2 \le (z^2 + 2)^2 - 3,\ z \in [3, 4]\}$.

(a) K ist ein Rotationskörper! Geben Sie die Rotationsachse an.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_K \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cdot z^2) \cdot z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}(x, y, z)$.

Lösung

(a) $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (z^2 - 1)^2 \le x^2 + y^2 \le (z^2 + 1)^2,\ z \in [3, 4]\}$.
Daraus folgt sofort, dass die z-Achse die Rotationsachse ist.

(b) Wir parametrisieren K mit Zylinderkoordinaten.

$$
\begin{aligned}
K &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (z^2 - 1)^2 \le x^2 + y^2 \le (z^2 + 1)^2,\ z \in [3, 4]\right\} \\
&= \left\{(r\cos(\phi), r\sin(\phi), z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, (z^2 - 1)^2 \le r^2 \le (z^2 + 1)^2,\ z \in [3, 4], \phi \in (0, 2\pi]\right\} \\
&= \left\{(r\cos(\phi), r\sin(\phi), z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z^2 - 1 \le r \le z^2 + 1,\ z \in [3, 4], \phi \in (0, 2\pi]\right\}.
\end{aligned}
$$

Somit ist

$$T : (r, \phi, z) \mapsto (r\cos(\phi), r\sin(\phi), z)$$

mit

$$(r, \phi, z) \in M := \{(s, \nu, h) : \nu \in (0, 2\pi], s \in [h^2 - 1, h^2 + 1] \text{ und } h \in [3, 4]\}$$

eine bijektive, reguläre Parametrisierung.
Alle Bedingungen für den Transformationssatz sind erfüllt, da der Integrand stetig und die Determinante der Parametrisierung auf M ungleich 0 ist.
Also gilt:

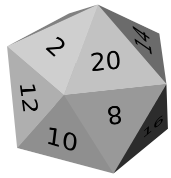
$$
\begin{aligned}
\int_K \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cdot z^2) \cdot z}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}(x, y, z) &= \int_M \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cdot z^2) \cdot z}{\sqrt{r^2}} \cdot r\,\mathrm{d}(r, \phi, z) \\
&= \int_3^4 \int_0^{2\pi} \int_{z^2-1}^{z^2+1} \cos(\frac{\pi}{2} \cdot z^2) \cdot z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \int_3^4 2\pi \cdot \cos(\frac{\pi}{2} \cdot z^2) \cdot 2z\,\mathrm{d}z \\
&\overset{\text{Subs. } y=z^2}{=\!=\!=} 2\pi \int_9^{16} \cos(\frac{\pi}{2} y)\mathrm{d}y = 4\sin(\frac{\pi}{2} y)\Big|_{y=9}^{y=16} = -4.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5

Ein zweistufiges Experiment wird durchgeführt. Zunächst wird mit einem sechsseitigen, nicht–gezinkten Würfel, auf dessen Seiten die Zahlen $1, 2, 3, 4, 5$ und 6 stehen, geworfen.
Das Ergebnis des Wurfs gibt an, wie häufig eine nicht–gezinkte Münze geworfen werden soll. Diese Münzwürfe werden dann mit einer Münze, deren Seiten „Wappen" und „Zahl" zeigen, durchgeführt.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, dass bei einer Durchführung des Experiments „Wappen" und „Zahl" gleich häufig auftreten?

(b) Geben Sie eine Formel für die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabenteil (a) an, falls der Würfel nicht sechs, sondern zwanzig gleiche Seiten hat (Ikosaeder; siehe Bild), die mit den Zahlen 1 bis 20 beschriftet sind.



Lösung

(a) Der Würfelwurf ist ein Laplace-Experiment, d.h. jede Zahl kommt mit gleicher Wahrscheinlichkeit $1/6$ vor. Der einfache Münzwurf ist ebenfalls ein Laplace-Experiment, wobei Wappen und Zahl jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ vorkommen. Beim n-fachen geordneten Münzwurf tritt jedes Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 2^{-n} auf.
Definiere nun die Ereignisse
$W_n :=$ „**W**ürfel zeigt die Zahl n",
$G :=$ „In einer Durchführung des Experiments tauchen Wappen und Zahl **g**leich häufig auf" und
$G_n :=$ „Wappen und Zahl tauchen bei n Würfen der Münze **g**leich häufig auf".
Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt dann:

$$P(G) = \sum_{n=1}^{6} P(G|W_n) \cdot P(W_n) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{6} P(G|W_n) = \frac{1}{6} \cdot \sum_{n=1}^{6} P(G_n)$$

Berechne nun $P(G_n)$:
Wir halten zunächst fest, dass man eine gerade Anzahl von Münzwürfen benötigt, damit überhaupt gleich häufig Wappen und Zahl auftreten können. Daher ist $P(G_1) = P(G_3) = P(G_5) = 0$.
Bei gerader Anzahl ($2k$) an Münzwürfen ist nach der Wahrscheinlichkeit für genau k mal Wappen (und damit auch genau k mal Zahl) gefragt. Um diese Wahrscheinlichkeit mit dem Quotienten aller günstiger und aller möglicher Ereignisse ausdrücken zu können, müssen wir die Reihenfolge der Münzwürfe beachten.
Anzahl alle günstigen Münzwürfe (Grundaufgabe 3'): $\binom{2k}{k}$
Anzahl alle möglichen Münzwürfe: 2^{2k}, da für jeden der $2k$ Würfe genau 2 Möglichkeiten bestehen.
Damit ist $P(G_{2k}) = \binom{2k}{k} 2^{-2k}$.
Folglich ist

$$P(G) = \frac{1}{6} \left(P(G_2) + P(G_4) + P(G_6)\right) = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2} + \frac{6}{16} + \frac{20}{64}\right) = \frac{19}{96}.$$

(b) Wir stützen uns auf obige Argumentation für die Wahrscheinlichkeit $P(G_n)$.
Demzufolge müssen wir beim Wurf eines zwanzigseitigen Würfels die Summe $\sum_{k=1}^{10} P(G_{2k})$ berechnen und mit dem Gewicht 20^{-1} (Wahrscheinlichkeit für Laplace-Experiment mit zwanzig möglichen Ausgängen) multiplizieren.
Insgesamt gilt also:

$$P(G) = \frac{1}{20} \sum_{k=1}^{10} \binom{2k}{k} 2^{-2k}.$$

Aufgabe 5: Lösungsalternative

(a) Wir geben einen vollständigen Baum für die günstigen Ereignisse an; die angegebenen Wahrscheinlichkeiten beruhen auf der Annahme, dass es sich bei Würfel- und Münzwurf um Laplace-Experimente handelt. Außerdem halten wir vorab fest, dass die Ergebnisse eines einzelnen Münfwurfs und eines einzelnen Würfelwurfs voneinander stochastisch unabhängig sind und der Würfelwurf eine vollständige Ereignisdisjunktion liefert. So können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit als Summe von Produkten der einzelnen Wahrscheinlichkeiten schreiben.

- Würfel: ⚀ (p=1/6)→ Keine günstigen Fälle!
- Würfel: ⚁ (p=1/6)→
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩 (p=1/4) |
  - Münzwürfe: 🅩Ⓦ (p=1/4) ||
  - Günstige Ausgänge insgesamt: 2.
- Würfel: ⚂ (p=1/6)→ Keine günstigen Fälle!
- Würfel: ⚃ (p=1/6)→
  - Münzwürfe: ⓌⓌ🅩🅩 (p=1/16) |
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩Ⓦ🅩 (p=1/16) ||
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩🅩Ⓦ (p=1/16) |||
  - Münzwürfe: 🅩ⓌⓌ🅩 (p=1/16) ||||
  - Münzwürfe: 🅩Ⓦ🅩Ⓦ (p=1/16) 卌
  - Münzwürfe: 🅩🅩ⓌⓌ (p=1/16) |卌
  - Günstige Ausgänge insgesamt: 6.
- Würfel: ⚄ (p=1/6)→ Keine günstigen Fälle!
- Würfel: ⚅ (p=1/6)→
  - Münzwürfe: ⓌⓌⓌ🅩🅩🅩 (p=1/64) |
  - Münzwürfe: ⓌⓌ🅩Ⓦ🅩🅩 (p=1/64) ||
  - Münzwürfe: ⓌⓌ🅩🅩Ⓦ🅩 (p=1/64) |||
  - Münzwürfe: ⓌⓌ🅩🅩🅩Ⓦ (p=1/64) ||||
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩ⓌⓌ🅩🅩 (p=1/64) 卌
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩Ⓦ🅩Ⓦ🅩 (p=1/64) |卌
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩Ⓦ🅩🅩Ⓦ (p=1/64) ||卌
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩🅩ⓌⓌ🅩 (p=1/64) |||卌
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩🅩Ⓦ🅩Ⓦ (p=1/64) ||||卌
  - Münzwürfe: Ⓦ🅩🅩🅩ⓌⓌ (p=1/64) 卌卌
  - Münzwürfe: 🅩ⓌⓌⓌ🅩🅩 (p=1/64) |卌卌
  - Münzwürfe: 🅩ⓌⓌ🅩Ⓦ🅩 (p=1/64) ||卌卌
  - Münzwürfe: 🅩ⓌⓌ🅩🅩Ⓦ (p=1/64) |||卌卌
  - Münzwürfe: 🅩Ⓦ🅩ⓌⓌ🅩 (p=1/64) ||||卌卌
  - Münzwürfe: 🅩Ⓦ🅩Ⓦ🅩Ⓦ (p=1/64) 卌卌卌
  - Münzwürfe: 🅩Ⓦ🅩🅩ⓌⓌ (p=1/64) |卌卌卌
  - Münzwürfe: 🅩🅩ⓌⓌⓌ🅩 (p=1/64) ||卌卌卌
  - Münzwürfe: 🅩🅩ⓌⓌ🅩Ⓦ (p=1/64) |||卌卌卌
  - Münzwürfe: 🅩🅩Ⓦ🅩ⓌⓌ (p=1/64) ||||卌卌卌
  - Münzwürfe: 🅩🅩🅩ⓌⓌⓌ (p=1/64) 卌卌卌卌
  - Günstige Ausgänge insgesamt: 20.

Wir berechnen nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\text{“Wappen und Zahl gleich häufig”}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\cdot 6 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{64}\cdot 20 = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{5}{96} = \frac{19}{96}.$$

(b) Wir haben bereits bei der Angabe des Baums in Aufgabenteil (a) erkannt, dass der Würfel immer eine gerade Zahl zeigen muss, damit wir überhaupt “günstige Ereignisse” erhalten können. Außerdem lesen wir als Analogie aus Aufgabenteil (a) ab, dass die Wahrscheinlichkeit bei einem Würfel mit 20 Seiten, die die Zahlen 1 bis 20 zeigen, eine Summe der Form

$$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{20}\cdot P(\text{“Ein bestimmter Ausgang bei } 2k \text{ Würfen”}) \cdot \text{“Anzahl günstiger Ausgänge bei } 2k \text{ Würfen”}$$

ist, wobei “Würfe” hier “Münzwürfe” meint. Nun gilt:
$P(\text{“Ein bestimmter Ausgang bei } 2k \text{ Würfen”}) = \frac{1}{2^{2k}}$,
da bei jedem Wurf “W” oder “Z” als Ergebnis infrage kommt, und
“Anzahl günstiger Ausgänge bei $2k$ Würfen” $= \binom{2k}{k}$, vgl. Grundaufgabe 3’.

Insgesamt also: $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{20}\cdot 2^{-2k}\cdot\binom{2k}{k}$.