RWTH INSTITUT FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen
Raum 109

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
Fax: +49 241 80 92323
maier@instmath.rwth-aachen.de
http://www.instmath.rwth-aachen.de/maier

B. Sc. | WiSe 2015/2016 | 19.09.2016 | Dauer: 90 Minuten

Klausur: Höhere Mathematik III

Aufgabe 1
Gegeben seien die Raumkurve $\Phi \subset \mathbb{R}^3$ parametrisiert durch $\varphi\colon\ [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(t) \ := \ \big(t\cdot\sin(t),\, t\,,\ t\cdot\cos(t)\big)\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Länge von Φ.

(b) Ist das Kurvenintergral $\int\limits_{\Phi} f\cdot \mathrm{d}\varphi$ mit $f(x,y,z) := (x,-y,z)$ vom Weg unabhängig? Man berechne $\int\limits_{\Phi} f\cdot \mathrm{d}\varphi\,.$

Lösung

(a) Der Tangentialvektor lautet: $\qquad \varphi'(t) \ = \ \Big(\sin(t) + t\cos(t)\,,\ 1\,,\ \cos(t) - t\sin(t)\Big)\,.$
Berechnung der Länge:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(\Phi\big) \ &= \ \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t \\
&= \ \int_0^{2\pi} \sqrt{\big(\sin(t)+t\cos(t)\big)^2 + 1^2 + \big(\cos(t)-t\sin(t)\big)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin(t)^2 + 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\cos(t)^2 + 1^2 + \cos(t)^2 - 2t\sin(t)\cos(t) + t^2\sin(t)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \ \int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Schreibe das Integral um und substituiere $z = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot t$ mit $\mathrm{d}z = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{t^2+2}\,\mathrm{d}t \ = \ \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}\cdot t^2+1}\,\mathrm{d}t \ = \ 2\int_0^{\sqrt{2}\pi} \sqrt{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

Nun kann hyperbolisch substituiert werden mit $z = \sinh(x)$ und $\mathrm{d}z = \cosh(x)\,\mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
2\int_0^{\sqrt{2}\pi} \sqrt{z^2+1}\,\mathrm{d}z \ &= \ 2\int_{\sinh^{-1}(0)=0}^{\sinh^{-1}(\sqrt{2}\pi)} \cosh(x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= \ 2\left[\frac{1}{2}\cosh(x)\sinh(x) + \frac{1}{2}x\right]_0^{\sinh^{-1}(\sqrt{2}\pi)} \\
&= \ \cosh(\sinh^{-1}(\sqrt{2}\pi))\cdot\sqrt{2}\pi + \sinh^{-1}(\sqrt{2}\pi)
\end{aligned}$$

(b) Das Vektorfeld ist in einer Umgebung der Kurve stetig, da die Komponentenfunktionen Polynome sind. Das Kurvenintegral $\int_\Phi f\cdot d\varphi$ ist in $\mathbb{R}^3$ genau dann vom Wege unabhängig, falls eine C^1-Funktion $h\ :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ existiert, die

$$f(x,y,z) \ = \ \nabla h(x,y,z) \qquad \text{für alle } \ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

erfüllt. Setzte $h(x,y,z) := \frac{1}{2}(x^2-y^2+z^2)$, dann folgt

$$f(x,y,z) \ = \ (x,-y,z) \ = \ \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{2}(x^2-y^2+z^2), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\frac{1}{2}(x^2-y^2+z^2), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{2}(x^2-y^2+z^2)\Big) \ = \ \nabla h(x,y,z)$$

für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ und nach Satz 9.1.7 gilt:

$$\begin{aligned}\int_\Phi f \cdot \mathrm{d}\varphi &= h\big(\varphi(2\pi)\big) - h\big(\varphi(0)\big) \\ &= h(0, 2\pi, 2\pi) - h(0, 0, 0) \\ &= 0 - \frac{1}{2}\, 4\pi^2 + \frac{1}{2}\, 4\pi^2 - 0 + 0 - 0 = 0\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2
Gegeben sei das reguläre Flächenstück

$$\mathcal{F}\colon \Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon\, x^2+y^2-z\,=\,0\,,\quad 0\,\le\, z\,\le\,1\Big\}\,,$$

wobei der an $\mathcal{F}$ gelegene Einheitsnormalenvektor N negative z–Komponente habe. Es sei $f\colon\, \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$f(x,y,z)\;:=\;\begin{pmatrix} xy^3-y^2 & + & \cosh(y)\\ \dfrac{3}{2}\,x^2\big(y^2+1\big) & + & x\cdot\sinh(y)\\ e^{x^2+z} & - & 9z^2\end{pmatrix}\,.$$

(a) Man zeige $f(-x,-y,z)\;=\;f(x,y,z)$ für alle $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$

(b) Berechnen Sie $\int\limits_{\mathcal{F}}\langle\,\mathrm{rot}\,(f)\,,\,N\,\rangle\,\mathrm{d}o$.

Lösung

(a) Es ist

$$f(-x,-y,z)\;=\;\begin{pmatrix}(-x)(-y)^3-(-y)^2+\cosh(-y)\\ \frac{3}{2}\,(-x)^2\big((-y)^2+1\big)-x\cdot\sinh(-y)\\ e^{(-x)^2+z}-9z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy^3-y^2+\cosh(y)\\ \frac{3}{2}\,x^2\big(y^2+1\big)+x\cdot\sinh(y)\\ e^{x^2+z}-9z^2\end{pmatrix},$$

da $\sinh(-y)=-\sinh(y)$ und $\cosh(-y)=\cosh(y)$ gilt.

(b) Wir definieren die Kreisscheibe $K:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2\le 1, z=1\}$ mit dem an K gelegenen Einheitsnormalenvektor $N_K:=(0,0,-1)^T$. Es gilt

$$\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2=1, z=1\Big\}=\partial\mathcal{F}=\partial K=:\Gamma$$

ist eine geschlossene Kurve.
Der Durchlaufsinn von Γ wird so gewählt, dass N und Γ bzw. N_K und Γ eine Rechtsschraube bilden. Mit obiger Wahl von N_K gilt dies für die Kurve bzgl. beider Flächenstücke $\mathcal{F}$ und K gleichzeitig.
Weiter ist f differenzierbar in $\mathbb{R}^3$.
Wir verwenden zweimal den Satz von Stokes und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}}\langle\mathrm{rot}(f),N\rangle_{\mathbb{R}^3}\,\mathrm{d}\sigma&=\int_{\Gamma}f\cdot\mathrm{d}\gamma=\int_K\langle\mathrm{rot}(f),N_K\rangle_{\mathbb{R}^3}\,\mathrm{d}\sigma\\ &=-\int_K(\partial_x f_2-\partial_y f_1)\,\mathrm{d}\sigma=-\int_K 3x(y^2+1)+\sinh(y)-3xy^2+2y-\sinh(y)\,\mathrm{d}\sigma\\ &=-\int_K 3x+2y\,\mathrm{d}\sigma=-\int_0^1\int_0^{2\pi}3r^2\cos(\varphi)+2r^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\phi\mathrm{d}r=0.\end{aligned}$$

<u>**Alternative Lösung zu (b):**</u>
Es gilt

$$\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=1, z=1\right\} = \partial\mathcal{F} =: \Gamma$$

ist eine geschlossene Kurve.
Wir parametrisieren Γ durch $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\cos(t), -\sin(t), 1)^T$.
Damit bilden Γ und N eine Rechtsschraube.
Weiter ist f differenzierbar in $\mathbb{R}^3$.
Zudem halten wir fest, dass folgendes gilt:

- $\gamma(s+\pi) = (-\cos(s), \sin(s), 1)^T$ und daher mit (a) $f(\gamma(s+\pi)) = f(\gamma(s))$, $(\star)$
- $\gamma'(t) = (-\sin(t), -\cos(t), 0)^T$ und $\gamma'(s+\pi) = (\sin(s), \cos(s), 0)^T = -\gamma'(s)$. $(\star\star)$

Wir verwenden den Satz von Stokes und obige Anmerkungen und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{F}} \langle \mathrm{rot}(f), N\rangle_{\mathbb{R}^3}\,\mathrm{d}\sigma &= \int_\Gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma \\
&= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \Big\langle \underbrace{f(\gamma(s+\pi))}_{\overset{(\star)}{=} f(\gamma(s))}, \underbrace{\gamma'(s+\pi)}_{\overset{(\star\star)}{=} -\gamma'(s)} \Big\rangle \,\mathrm{d}s \\
&\overset{(\star),(\star\star)}{=\!=\!=} \int_0^{\pi} \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} \langle f(\gamma(s)), \gamma'(s)\rangle \,\mathrm{d}s = 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3
Die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $h(x,y) := \arctan(xy) + \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ und sei $(x^*, y^*) := \big(0,1\big)$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $a > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [-a,a] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $h\big(x, f(x)\big) = 0$ für alle $x \in [-a,a]$.

(b) Geben Sie die Abbildungsvorschrift der Tangente $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = T(x)$, an die Niveaumenge $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon h(x,y) = 0\big\}$ im Punkt (x^*, y^*) explizit an.

Lösung

(a) Zunächst ist h als Komposition stetig differenzierbarer Funktionen selbst stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$, und somit insbesondere auch in einer Umgebung von (x^*, y^*).
Wegen $\arctan(0) = 0$ gilt

$$h(x^*, y^*) = 0.$$

Weiter ist

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x,y) = \frac{x}{1 + x^2 y^2} + y$$

und damit

$$\frac{\partial}{\partial y} h(x^*, y^*) = 1 \neq 0.$$

Es folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass ein $a > 0$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f\colon [-a, +a] \to \mathbb{R}$ existieren mit

$$h(x, f(x)) = 0 \quad \text{für } |x| \leq a.$$

(b) Nach dem Satz über implizite Funktionen gilt

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial h}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial h}{\partial y}(x, f(x))}.$$

Wegen $\frac{\partial}{\partial x} h(x,y) = \frac{y}{1+x^2y^2}$ folgt mit Teil (a)

$$f'(x) = -\frac{1}{1} = -1.$$

Die Tangente T hat somit die Form $T(x) = -x + c$ für ein $c \in \mathbb{R}$.
Da die Tangente den Graphen von h in (x^*, y^*) berührt, muss $T(0) = 1$ gelten; also folgt $c = 1$.

Aufgabe 4

Es seien $D := (0,1) \subset \mathbb{R}$ und für $n \in \mathbb{N}$ seien definiert, $f_n(x) = \frac{1}{x}$ für $x \in D$ und $g_n(x) = \frac{1}{n}$ für $x \in D$.

(a) Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

(b) Zeigen Sie, dass die Produktfolge $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_n\colon D \to \mathbb{R}$, für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch $p_n(x) := f_n(x) \cdot g_n(x)$ für $x \in D$, punktweise konvergiert. Ist die Konvergenz gleichmäßig?

Lösung

(a) Zuerst überprüfen wir $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise Konvergenz.
Da $f_n(x) = f_m(x)$ für alle $x \in D$ und alle $n, m \in \mathbb{N}$, folgt, dass der punktweise Limes $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{1}{x}$ existiert, denn

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \ \ \forall\, x \in D.$$

Weiterhin gilt auch, dass die Folge gleichmäßig konvergiert, denn zu jedem $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $N \in \mathbb{N}$, so dass gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

für alle $n \geq N$ und alle $x \in D$. Dieses N ist in unserem Fall beliebig, z.B. 1, da immer gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| = 0 < \epsilon.$$

Nun überprüfen wir $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ auf punktweise Konvergenz.
Wir sehen sofort, dass $\frac{1}{n} \to 0$ konvergiert für $n \to \infty$. Also ist der punktweise Limes $g(x) := 0$.
Da die Funktion konstant ist, folgt auch die gleichmäßige Konvergenz. Setze $N(\epsilon) := \lceil \frac{1}{\epsilon} \rceil$, dann gilt, dass

$$|g(x) - g_n(x)| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} \leq \epsilon$$

für alle $x \in D$ und alle $n > N(\epsilon)$.

(b) $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$konvergiert punktweise gegen $p(x) := 0$:
Für festes $x \in D$ definieren wir $N(\epsilon) := \lceil \frac{1}{x\cdot\epsilon} \rceil$, dann gilt, dass

$$|p_n(x) - p(x))| = |p_n(x)| = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{N(\epsilon)} \leq \epsilon$$

für alle $n > N(\epsilon)$.
$\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gleichmässig:
Wir definieren $x_n := \frac{1}{n}$.
Dann gilt, dass $p_n(x_n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt insbesondere wir finden für $\epsilon < 1$ **kein** $N(\epsilon)$, so dass für alle $n > N(\epsilon)$

$$|p_n(x_n) - p(x_n)| = |p_n(x_n)| < \epsilon$$

gilt. Da die Aussage $|p_n(x) - p(x)| < \epsilon$ aber für alle $x \in D$ gelten muss, ist dies ein Widerspruch zur gleichmässigen Konvergenz in D.

Aufgabe 5

(a) Die börsennotierte Coma Cola AG stellt sehr stark koffeinhaltige Erfrischungsgetränke her. Unter dem Leergut, das der Firma zur Wiederverwendung zugeht, sind 60% PET– und 40% Glasflaschen. 6% aller Flaschen und 10% aller PET–Flaschen sind irrtümlich angelieferte Produkte anderer Hersteller, die von der Coma Cola AG sofort vernichtet werden.

Wie viele Glasflaschen anderer Hersteller sind in einer Leergut–Lieferung von 20.000 Flaschen?

(b) 5% der konzerneigenen Glasflaschen und 3% der Coma Cola–PET–Flaschen sind in einem so schlechten Zustand, dass sie nicht nach einer einfachen Reinigung wiederbefüllt werden können; diese Flaschen müssen eingeschmolzen werden.

Coma Cola erhält 10.000 Flaschen Leergut. Wie viele konzerneigene Glas– und wie viele konzerneigene PET–Flaschen kann die Firma nach einfacher Reinigung gemäß aller obigen Angaben wieder befüllen?

Lösung

(a) Es seien folgende Ereignisse definiert:

$K \mathrel{\widehat{=}}$ Die Flasche ist eine **K**unststoff–Flasche (PET–Flasche),
$G \mathrel{\widehat{=}}$ Die Flasche ist eine **G**las–Flasche,
$F \mathrel{\widehat{=}}$ Die Flasche ist eine **F**remdflasche.

Aus der Aufgabenstellung sind bekannt: $\mathrm{P}(K) = 0{,}6$, $\mathrm{P}(G) = 0{,}4$, $\mathrm{P}(F) = 0{,}06$ und $\mathrm{P}(F|K) = 0{,}1$. Gesucht ist die Anzahl N aller Glasflaschen von Fremdherstellern aus 20.000 Leergut-Flaschen.

Es gilt $N = \mathrm{P}(F \cap G) \cdot 20.000$.
Weiter ist $\mathrm{P}(F) = \mathrm{P}((F \cap G) \cup (F \cap K)) = \mathrm{P}(F \cap G) + \mathrm{P}(F \cap K)$, da K und G, und damit auch $F \cap G$ und $F \cap K$ disjunkte Ereignisse sind.
Außerdem ist $\mathrm{P}(F \cap K) = \mathrm{P}(F|K) \cdot \mathrm{P}(K) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 = 0{,}06$.
Folglich gilt $\mathrm{P}(F \cap G) = \mathrm{P}(F) - \mathrm{P}(F \cap K) = 0{,}06 - 0{,}06 = 0$ und damit $N = 0$, d.h. keine der Glasflaschen ist von einem Fremdhersteller.

Alternative Lösung:
Wenn 10% aller PET–Flaschen Fremdgut sind und insgesamt 60% aller Flaschen PET–Flaschen sind, dann sind $10\% \cdot 60\% = 6\%$ aller Flaschen PET–Flaschen von anderen Herstellern.
Dies entspricht bereits dem Anteil des Fremdguts einer Leergut-Lieferung, so dass keine Glasflasche von einem anderen Hersteller sein kann. Antwort: Keine Glasflasche ist eine Fremdflasche.

(b) Es gilt $\mathrm{P}(K) = \mathrm{P}(K \cap F) + \mathrm{P}(K \cap F^c)$, wobei F^c das Komplementärereignis von F darstellt.
Damit sind $\mathrm{P}(K \cap F^c) = \mathrm{P}(K) - \mathrm{P}(K \cap F) = 54\%$ aller Flaschen konzerneigene PET–Flaschen.
Bei einer Lieferung von 10.000 Flaschen sind das $10.000 \cdot 0{,}54 = 5.400$ Stück.
Davon werden 3%, d.h. $5.400 \cdot 0{,}03 = 162$ Trinkbehälter eingeschmolzen.
Insgesamt werden daher $5.400 - 162 = 5238$ PET–Flaschen gereinigt und neu befüllt.

Da alle Glasflaschen von Coma Cola sind, gibt es aus der Lieferung $10.000 \cdot 0{,}4 = 4.000$ konzerneigene Glasflaschen.
Davon werden 5%, d.h. $4.000 \cdot 0{,}05 = 200$ Stück eingeschmolzen.
Somit werden $4.000 - 200 = 3.800$ Glasflaschen gereinigt und neu befüllt.