Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape
Templergraben 55
52062 Aachen

Tel.: +49 241 80-94925
Sekr.: +49 241 80 94927
maier@instmath.rwth-aachen.de

B. Sc.
WS 2019/2020

Klausur: Höhere Mathematik III

26.02.2020
Dauer: 90 Minuten

Aufgabe 1
Es sei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$g(x) := \exp\big(|x|\big),\ x \in (-\pi, \pi]$$

und dann 2π–periodisch fortgesetzt.

(a) Bestimmen Sie die reelle Fourierreihe von g.

(b) Geben Sie auch die komplexe Fourierreihe von g an.

(c) Beweisen Sie

$$2 \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot e^{\pi} - 1}{1+n^2}\right] + e^{\pi} - 1 = \pi\,.$$

Lösung

(a) Da g symmetrisch zur y-Achse ist, gilt $b_n = 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} e^x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}e^x\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right)$$

Jeweils mit partieller Integration gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} e^{|x|}\cos(nx)\,\mathrm{d}x &\overset{\text{Integrand gerade}}{=} 2\int_0^{\pi} e^x\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\left[e^x\cos(nx)\big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x(-\sin(nx))n\,\mathrm{d}x\right] \\ &= 2\left[e^{\pi}(-1)^n - 1 + \left[\underbrace{e^x\sin(nx)n\big|_0^{\pi}}_{=0} - \int_0^{\pi} e^x\cos(nx)n^2\,\mathrm{d}x\right]\right]\end{aligned}$$

Durch Umstellen der obigen Gleichung erhalten wir somit

$$I_n := \int_0^{\pi} e^x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+n^2}\left(e^{\pi}(-1)^n - 1\right)$$

und damit

$$a_n = \frac{2}{\pi}I_n = \frac{2}{\pi}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}.$$

Die reelle Fourierreihe von g lautet daher

$$S_g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\left(e^{\pi}-1\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2}\cos(nx).$$

(b) Die komplexen Fourier-Koeffizienten erhalten wir durch die folgenden Relationen:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{\pi}\left(e^\pi - 1\right) \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2} = c_n, \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

Die komplexe Fourierreihe von g lautet daher

$$\widetilde{S}_g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2} e^{inx}.$$

(c) Da g in $x = 0$ stetig ist, gilt $S_g(0) = g(0)$.
Diese Gleichung mit π multipliziert ergibt

$$\frac{1}{\pi}\left(e^\pi - 1\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2} \underbrace{\cos(n \cdot 0)}_{=1} = 1 \iff e^\pi - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2} = \pi$$

was zu zeigen war.

Alternative, falls erst **(b)** und anschließend **(a)** bearbeitet wird:

(b') Für $n \in \mathbb{Z}$ gilt mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} e^{-x}e^{-inx}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} e^{x}e^{-inx}\,\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\left.\frac{e^{(-1-in)x}}{-1-in}\right|_{-\pi}^{0} + \left.\frac{e^{(1-in)x}}{1-in}\right|_{0}^{\pi}\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-1-in}\left(1 - e^{(1+in)\pi}\right) + \frac{1}{1-in}\left(e^{(1-in)\pi} - 1\right)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-1+in}{1+n^2} - \frac{1+in}{1+n^2} + \frac{(1-in)(-1)^n e^\pi}{1+n^2} + \frac{(1+in)(-1)^n e^\pi}{1+n^2}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2} \end{aligned}$$

Die komplexe Fourierreihe von g lautet daher

$$\widetilde{S}_g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2} e^{inx}.$$

(a') Die reellen Fourier-Koeffizienten von g erhalten wir durch die folgenden Relationen:

$$a_0 = 2c_0 \overset{(b')}{=} \frac{2}{\pi}(e^\pi - 1), \quad a_n = c_n + c_{-n} \overset{(b')}{=} \frac{2}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}) \overset{(b')}{=} 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Die reelle Fourierreihe von g lautet daher

$$S_g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\left(e^\pi - 1\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{e^\pi(-1)^n - 1}{1+n^2}\cos(nx).$$

Aufgabe 2

Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{\log\left(1+|x\cdot y|^2\right)}{x^2+y^2}, & \text{falls} \quad x^2+y^2 > 0 \\ 0, & \text{falls} \quad x^2+y^2 = 0\,. \end{cases}$$

(a) Überprüfen Sie f im Punkte $(0,0)$ auf Stetigkeit.

(b) Bestimmen Sie, falls existent, die partiellen Ableitungen von f im Punkte $(0,0)$.

(c) Ist f in einer Umgebung von $(0,0)$ differenzierbar?

Hinweis: Es gilt $2|xy| \le x^2+y^2$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$.

Lösung

(a) Sei $(x,y) \neq (0,0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x,y)| &= \frac{\log(1+x^2y^2)}{x^2+y^2} \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \\ &\overset{\text{Hinweis}}{\le} \frac{1}{2}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2}\frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} \\ &= \frac{1}{2}(x^2+y^2) \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Da $f(0,0)=0$, ist f stetig in $(0,0)$.

(b) Es gilt

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(f(t,0)-f(0,0)) = \lim_{t\to 0} t^{-3}\underbrace{\log(1+0)}_{=0} = 0$$

und analog

$$\lim_{t\to 0} t^{-1}(f(0,t)-f(0,0)) = 0.$$

Damit ist f in $(0,0)$ partiell differenzierbar mit $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

(c) In $(x,y) \neq (0,0)$ ist f partiell differenzierbar mit

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^2 \cdot \frac{1}{(1+x^2y^2)(x^2+y^2)} + 2x \cdot \frac{-\log(1+x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| &\le 2|x| \left(\underbrace{\frac{1}{1+x^2y^2}}_{\le 1} \cdot \underbrace{\frac{y^2}{x^2+y^2}}_{\le 1} + \underbrace{\frac{\log(1+x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}}_{\le 1/2 \text{ siehe (a)}} \right) \\ &\le 3|x| \\ &\overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{wegen (a)} \end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2yx^2 \cdot \frac{1}{(1+x^2y^2)(x^2+y^2)} + 2y \cdot \frac{-\log(1+x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

mit

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Damit hat f in einer Umgebung von $(0,0)$ partielle Ableitungen, die stetig sind. Daraus folgt mit Satz 8.2.6, dass f in einer Umgebung von $(0,0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 3

(a) Gegeben sei das reguläre Flächenstück

$$\mathcal{F} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; z = 1 + \cos\Big(\pi \cdot \sqrt{x^2+y^2}\Big),\ 4x^2 + 4y^2 < 9 \right\}.$$

$N\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}^3$ bezeichne das Einheitsnormalenfeld auf $\mathcal{F}$ mit negativer z–Komponente.
Bestimmen Sie eine reguläre Parametrisierung der Randkurve von $\mathcal{F}$, so dass N mit dem Durchlaufsinn dieser Kurve eine Rechtsschraube bildet.

(b) Gegeben sei das Vektorfeld $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto \Big(y \cdot (z^2+3)\,,\ -5xz\,,\ 5(x^2-z)\cdot y\Big)$,
und N sei das Einheitsnormalenfeld auf $\mathcal{F}$ aus **(a)**. Berechnen Sie

$$I := \int_{\mathcal{F}} \Big\langle \big(\operatorname{rot}(G)\big)\,,\, N \Big\rangle do\,.$$

Lösung

(a) Die Punkte auf der Randkurve von $\mathcal{F}$ sind gegeben durch:

$$\mathcal{M} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 + \cos\left(\pi \cdot \sqrt{x^2+y^2}\right),\ 4x^2+4y^2 = 9 \right\}.$$

Wegen

$$4x^2 + 4y^2 = 9 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \frac{3}{2} \text{ und } \cos(\pi \cdot \frac{3}{2}) = 0$$

ist $\mathcal{M}$ ein Kreis in der nach $z = 1$ verschobenen (x,y)-Ebene mit Radius $\frac{3}{2}$. Eine Parametrisierung dafür ist gegeben durch

$$\tilde{\gamma}\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(\varphi) \\ \frac{3}{2}\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Da N eine negative z-Komponente besitzt, müssen wir die Orientierung umkehren, damit die Parametrisierung mit N eine Rechtschraube bildet. Es ergibt sich

$$\gamma\colon [0,2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(-\varphi) \\ \frac{3}{2}\sin(-\varphi) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\cos(\varphi) \\ -\frac{3}{2}\sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Randkurve $\Gamma := \{\gamma(\varphi) : \varphi \in [0,2\pi)\}$ ist außerdem regulär (da doppelpunktfrei, stetig differenzierbar und $\|\gamma'(\varphi)\| > 0$).

(b) G ist in einer Umgebung von $\mathcal{F}$ stetig differenzierbar.
Wir wollen den Integralsatz von Stokes anwenden und berechnen dazu die Ableitung von γ aus Aufgabenteil a):

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}\sin(\varphi) \\ -\frac{3}{2}\cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich nach Stokes

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{F}} \Big\langle \big(\operatorname{rot}(G)\big)\,,\,N\Big\rangle do &= \oint_{\Gamma} G \cdot d\gamma \\ &= \int_0^{2\pi} \Big\langle G \circ \gamma, \gamma' \Big\rangle_{\mathbb{R}^3} \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} 9\sin^2(\varphi) + \frac{45}{4}\cos^2(\varphi)\; d\varphi.\end{aligned}$$

Wir wissen oder rechnen nach, dass gilt:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi)\; d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi)\; d\varphi = \pi$$

Insgesamt ergibt sich damit

$$I = 9\pi + \frac{45}{4}\pi = \frac{81}{4}\pi.$$

Aufgabe 4
Gegeben seien zwei unterscheidbare Glücksräder mit je M gleich wahrscheinlichen Feldern, nummeriert jeweils von 1 bis M.

(a) Beide Glücksräder werden gleichzeitig gedreht. Sei X die Zufallsvariable, welche den beiden Endpositionen der Glücksräder das Maximum ihrer Nummern zuweist.

Bestimmen Sie das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P\Big(\{X = k\}\Big) \text{ für alle } k \in \mathcal{W}(X)$$

und die Verteilungsfunktion von X.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert von X in vollständig gekürzter Form.

Hinweis: Sie dürfen bei Bedarf die folgenden Formeln ohne Beweis verwenden ($n \in \mathbb{N}$):

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n+1)\cdot n}{2}, \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{(n+1)}{6} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{(n+1)^4}{4} - \frac{(n+1)^3}{2} + \frac{(n+1)^2}{4}$$

Lösung

(a) Sei $\Omega = \{1, \dots, M\}^2$, $P(\omega) = \frac{1}{M^2}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt für $k \in \{1, \dots, M\}$:

$$X(\omega) = k \Leftrightarrow \omega = (k, l) \vee \omega = (l, k), l \in \{1, \dots, k\}.$$

Da (k, k) nur einmal vorkommt und für $l \in \{1, \dots, k-1\}$ je zwei Möglichkeiten bestehen folgt:

$$|\{\omega \mid X(\omega) = k\}| = 1 + 2(k-1) = 2k - 1$$

Da wir einen Laplace-Raum haben, gilt damit für $k \in \{1, \dots, M\}$: $P(X = k) = \frac{2k-1}{M^2}$.
Zur Verteilungsfunktion: Für $t < 1$ gilt $F(t) = 0$, für $t > M$ gilt $F(t) = 1$. Ansonsten gilt:

$$\begin{aligned} F(t) = \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor} P(X = k) &= \frac{\sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor}(2k-1)}{M^2} \\ &= \frac{(\lfloor t \rfloor + 1)\lfloor t \rfloor - \lfloor t \rfloor}{M^2} = \frac{\lfloor t \rfloor^2}{M^2} \end{aligned}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{M} k \cdot P(\{X = k\}) = \sum_{k=1}^{M} \frac{k(2k-1)}{M^2} \\ &= \frac{2\sum_{k=1}^{M} k^2 - \sum_{k=1}^{M} k}{M^2} \\ &\overset{\text{Hinweis}}{=} \frac{2\left(\frac{(M+1)^3}{3} - \frac{(M+1)^2}{2} + \frac{M+1}{6}\right) - \frac{(M+1)M}{2}}{M^2} \\ &= \frac{\frac{2M^3+6M^2+6M+2}{3} - \frac{2M^2+4M+2}{2} + \frac{M+1}{3} - \frac{M^2}{2} - \frac{M}{2}}{M^2} = \frac{\frac{2}{3}M^3 + \frac{M^2}{2} - \frac{M}{6}}{M^2} \\ &= \frac{4M^2 + 3M - 1}{6M} \left(= \frac{2}{3}M + \frac{1}{2} - \frac{1}{6M}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Sind folgende Aussagen **wahr** oder **falsch**? Geben Sie eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel an.

(a) Sei $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ stetige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ und $f_{X^2}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei Dichtefunktion von X^2, d.h. für $t \in \mathbb{R}$ ist $F_{X^2}(t) \,=\, P\Big(\{X^2 \le t\}\Big) \,=\, \int\limits_{-\infty}^{t} f_{X^2}(\lambda)\, d\lambda$. Dann gilt:

$$E\left(X^4\right) \,=\, \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 f_{X^2}(\lambda)\, d\lambda,$$

falls das Integral auf der rechten Seite endlich ist.

(b) Es sei $\mathcal{F} = S^2 = \Big\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\Big|\; \|x\| = 1\Big\}$ die Einheitsphäre im $\mathbb{R}^3$, $N(x) = x \in \mathbb{R}^3$ ein Einheitsnormalenfeld auf $\mathcal{F}$ und $H\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein beliebiges $\mathcal{C}^1$–Vektorfeld. Dann gilt:

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \Big\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} do \,=\, 0$$

Hinweis: Zur Begründung verwende man zum Beispiel

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \Big\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} do \,=\, \int\limits_{\mathcal{F}^+} \Big\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} do \,+\, \int\limits_{\mathcal{F}^-} \Big\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} do\,,$$

wobei $\mathcal{F}^+ = \Big\{x \in \mathcal{F} \;\Big|\; x_3 > 0\Big\}$ die Nordhalbsphäre und $\mathcal{F}^- = \Big\{x \in \mathcal{F} \;\Big|\; x_3 < 0\Big\}$ die Südhalbspähre ist, bzw. die gerichtete „Äquatorkurve“ $\Gamma = \Big\{\gamma(t) \;\Big|\; t \in [0, 2\pi)\Big\}$, $\gamma(t) := \Big(\cos(t)\,,\, \sin(t)\,,\, 0\Big) \in \mathcal{F}$.

Lösung

(a) Die Aussage ist **wahr**.
Führe dazu eine neue Zufallsvariable $Y := X^2$ ein. Dann gilt

$$E(X^4) = E(Y^2),$$

oder auch

$$E(X^4) = E(g(Y)), \quad \text{für } g(\lambda) = \lambda^2,\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mit Lemma 11.5.9 gilt

$$E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) f_Y(\lambda)\, d\lambda$$

und demnach

$$E(X^4) = E(g(Y)) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 f_Y(\lambda)\, d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 f_{X^2}(\lambda)\, d\lambda.$$

(b) Die Aussage ist **wahr**. Dazu:
Mit dem Hinweis gilt

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \Big\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} do \,=\, \int\limits_{\mathcal{F}^+} \Big\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} do \,+\, \int\limits_{\mathcal{F}^-} \Big\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N\Big\rangle_{\mathbb{R}^3} do\,.$$

Mit Stokes folgt

$$\int\limits_{\mathcal{F}^+} \left\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N \right\rangle_{\mathbb{R}^3} do = \oint\limits_{\Gamma} H \cdot d\gamma,$$

da die gerichtete Kurve Γ mit $N_{|\mathcal{F}^+}$ eine Rechtsschraube bildet. Ebenso gilt

$$\int\limits_{\mathcal{F}^-} \left\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N \right\rangle_{\mathbb{R}^3} do = \oint\limits_{-\Gamma} H \cdot d\gamma,$$

da die gerichtete Kurve $-\Gamma$ mit $N_{|\mathcal{F}^-}$ eine Rechtsschraube bildet.
Insgesamt ergibt sich damit

$$\int\limits_{\mathcal{F}} \left\langle \Big(\operatorname{rot}(H)\Big)\,,\, N \right\rangle_{\mathbb{R}^3} do = \oint\limits_{\Gamma} H \cdot d\gamma + \oint\limits_{-\Gamma} H \cdot d\gamma = 0$$