Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2007
(90 Minuten)
Höhere Mathematik III
26.07.2007

A

Aufgabe 1 [6 Punkte]

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Der Normalenvektor an den Graph einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$n(x,y) = \frac{(-\nabla f(x,y),\, 1)}{\sqrt{1 + \|\nabla f(x,y)\|^2}} \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \ .$$

(b) Sei $(\ell_k)_{k\in\mathbb{R}}$ das VONS von $L^2(0,2\pi)$ aus der Vorlesung. Dann konvergieren für jedes $f \in L^2(0,2\pi)$ die Partialsummen

$$S_{f,N} = \sum_{k=-N}^{N} \langle f, \ell_k \rangle_{L^2(0,2\pi)} \cdot \ell_k$$

der Fourier–Reihe im quadratischen Mittel gegen f (für $N \to \infty$).

(c) Seien $f_n\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ stetig für $n \in \mathbb{N}$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx \ .$$

(d) Ein normierter Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist vollständig, wenn jede konvergente Folge eine Cauchy–Folge ist.

(e) Sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$. Dann ist F monoton wachsend und stetig.

(f) Ist $M \subset \mathbb{R}^3$ abgeschlossen, so ist $\partial M \neq \emptyset$.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

B

Aufgabe 2 [12 Punkte]

Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x^3}{1 + n x^2}\ , \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\ .$$

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert. *(6 Punkte)*

(b) Gegen welche Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert $f_n' = f_n'(x)$ punktweise für $x \in \mathbb{R}$. Ist diese Konvergenz auch gleichmäßig auf $\mathbb{R}$? *(6 Punkte)*

Bitte wenden!!

C

Aufgabe 3 **[15 Punkte]**

Es sei

$$V(x,y,z) := \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right) \qquad \text{mit} \quad a,b,c > 0$$

und

$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1\right\}.$$

Berechnen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_{\partial B} \langle V, N \rangle \, do(x,y,z) ,$$

wobei $N\colon \partial B \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld an ∂B ist.

D

Aufgabe 4 **[11 Punkte]**

Lösen Sie das Anfangs–Randwert–Problem für die Schrödinger–Gleichung

$$u_t - iu_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0$$

mit den Randwerten

$$u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \qquad t > 0$$

und den Anfangswerten

$$u(x,0) = 1 + \cos(2x), \qquad x \in (0,\pi).$$

Hinweis: Verwenden Sie einen *Getrennte–Variablen Ansatz.*

E

Aufgabe 5 **[10 Punkte]**

Gegeben sei eine Urne mit 5 blauen, 5 weißen und 3 schwarzen Kugeln.
Es werden nacheinander 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.

Man berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse

(a) Die zweite gezogene Kugel ist blau. *(2 Punkte)*

(b) Die ersten beiden gezogenen Kugeln sind weiß. *(2 Punkte)*

(c) Die erste Kugel ist schwarz oder die zweite Kugel ist blau. *(6 Punkte)*

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2007

(120 Minuten)

Höhere Mathematik III + IV

26.07.2007

F

Aufgabe 1 **[6 Punkte]**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Ist $M \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, so ist $\partial M \neq \emptyset$.

(b) Das Skalarprodukt auf $L^2\Big((0,T)\,,\,\mathbb{C}\Big)$ ist gegeben durch $< f, g > := \int\limits_0^T f(t)\, g(t)\, dt$.

(c) Zwei holomorphe Funktionen $f, g\colon G \to \mathbb{C}$ stimmen auf ganz $G(=$ Gebiet$)$ überein, falls es ein $z_0 \in G$ gibt mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein W–Raum. Für jede messbare Zufallsvariable $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\Big\{\omega\colon X(\omega) \le t\Big\} \in \mathcal{E}$

(e) Es sei $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom n–ten Grades. Hat f in $z_0 \in \mathbb{C}$ einen Pol der Ordnung ℓ, dann hat $p \circ f$ in z_0 einen Pol der Ordnung $n\ell$.

(f) Gilt $f = u + iv\colon G \to \mathbb{C}$ $(G \subset \mathbb{C}$ Gebiet$)$ und sind $u, v\colon G \to \mathbb{R}$ aufgefasst als reelle Funktionen harmonisch, so ist f holomorph in G.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

B

Aufgabe 2 **[12 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x^3}{1 + n x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert. *(6 Punkte)*

(b) Gegen welche Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert $f_n' = f_n'(x)$ punktweise für $x \in \mathbb{R}$. Ist diese Konvergenz auch gleichmäßig auf $\mathbb{R}$? *(6 Punkte)*

D

Aufgabe 3 **[11 Punkte]**

Lösen Sie das Anfangs–Randwert–Problem für die Schrödinger–Gleichung

$$u_t - i u_{xx} = 0\,, \qquad 0 < x < \pi\,, \qquad t > 0$$

mit den Randwerten

$$u_x(0,t) = u_x(\pi\,,\,t) = 0\,, \qquad t > 0$$

und den Anfangswerten

$$u(x,0) = 1 + \cos(2x)\,, \qquad x \in (0,\pi)\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie einen *Getrennte–Variablen Ansatz.*

Bitte wenden!!

G

Aufgabe 4 **[10 Punkte]**

Bei einem Radrennen dopen 50% aller Athleten mit dem Mittel **Epo** und 30% mit **Testosteron**; die restlichen 20% sind sauber. Die anschließende Dopingprobe gibt bei 10% aller Epo–Doper, 60% aller Testosteron–Doper und bei keinem der sauberen Fahrer ein positives Ergebnis.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Dopingprobe negativ ist? *(3 Punkte)*

(b) Eine Dopingprobe ist positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrer mit Epo gedopt hat? *(3 Punkte)*

(c) Sind die Ereignisse „Ein Fahrer dopt“ und „Eine Dopingprobe ist positiv“ stochastisch unabhängig? *(4 Punkte)*

H

Aufgabe 5 **[5 Punkte]**

Berechnen Sie

$$\oint_{\Gamma} \frac{z^3 + 2z}{(z-1)^3}\, dz\,,$$

wobei $\Gamma = \partial B_2(0) \subset \mathbb{C}$ die Kreislinie mit Radius 2 ist.

I

Aufgabe 6 **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie alle Singularitäten von $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$.

Sind alle Singularitäten isoliert?

J

Aufgabe 7 **[7 Punkte]**

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{z-1} \cdot \exp\left(\frac{1}{1-z}\right)$$

in eine Laurent–Reihe um die isolierte Singularität $z_0 = 1$.
Nutzen Sie die Laurent–Reihe, um die Art der Singularität festzustellen und um das Residuum von f an der Stelle $z_0 = 1$ zu bestimmen.

K

Aufgabe 8 **[15 Punkte]**

Man berechne mit dem Residuensatz das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx \qquad \text{(hierbei sei } x \in \mathbb{R}\text{)}$$

und leite daraus den Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, dx$$

ab.

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2007
(180 Minuten)

Höhere Mathematik III + IV , Numerik ; HöMa Teil

26.07.2007

L

Aufgabe 1 **[6 Punkte]**

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

(a) Ist $M \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen, so ist $\partial M \neq \emptyset$.

(b) Das Skalarprodukt auf $L^2\Big((0,T)\,,\,\mathbb{C}\Big)$ ist gegeben durch $< f,g > := \int\limits_0^T f(t)\,g(t)\,dt$.

(c) Zwei holomorphe Funktionen $f,g\colon\, G \to \mathbb{C}$ stimmen auf ganz $G (=$ Gebiet$)$ überein, falls es ein $z_0 \in G$ gibt mit $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{E}, P)$ ein W–Raum. Für jede messbare Zufallsvariable $X\colon\, \Omega \to \mathbb{R}$ und jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\Big\{\omega\colon\, X(\omega) \le t\Big\} \in \mathcal{E}$

(e) Es sei $p\colon\, \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ein komplexes Polynom n–ten Grades. Hat f in $z_0 \in \mathbb{C}$ einen Pol der Ordnung ℓ, dann hat $p \circ f$ in z_0 einen Pol der Ordnung $n\ell$.

(f) Gilt $f = u + iv\colon\, G \to \mathbb{C}\,(G \subset \mathbb{C}$ Gebiet$)$ und sind $u, v\colon\, G \to \mathbb{R}$ aufgefasst als reelle Funktionen harmonisch, so ist f holomorph in G.

Hinweis: Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Minimalpunktzahl für Aufgabe 1 ist 0 Punkte. **Begründungen** sind weder nötig, noch erwünscht.

B

Aufgabe 2 **[12 Punkte]**

Betrachten Sie die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{n \cdot x^3}{1 + n x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\big(f_n\big)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergiert. *(6 Punkte)*

(b) Gegen welche Funktion $g\colon\, \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvergiert $f_n' = f_n'(x)$ punktweise für $x \in \mathbb{R}$. Ist diese Konvergenz auch gleichmäßig auf $\mathbb{R}$? *(6 Punkte)*

C

Aufgabe 3 **[15 Punkte]**

Es sei

$$V(x,y,z) := \left(\frac{x}{a^2}\,,\,\frac{y}{b^2}\,,\,\frac{z}{c^2}\right) \qquad \text{mit} \quad a,b,c > 0$$

und

$$B := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\colon\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1\right\}.$$

Berechnen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\int\limits_{\partial B} \langle V, N \rangle\, do(x,y,z)\,,$$

wobei $N\colon\, \partial B \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld an ∂B ist.

Bitte wenden!!

D

Aufgabe 4 **[11 Punkte]**

Lösen Sie das Anfangs–Randwert–Problem für die Schrödinger–Gleichung

$$u_t - i u_{xx} = 0, \qquad 0 < x < \pi, \qquad t > 0$$

mit den Randwerten

$$u_x(0,t) = u_x(\pi, t) = 0, \qquad t > 0$$

und den Anfangswerten

$$u(x,0) = 1 + \cos(2x), \qquad x \in (0,\pi).$$

Hinweis: Verwenden Sie einen *Getrennte–Variablen Ansatz.*

G

Aufgabe 5 **[10 Punkte]**

Bei einem Radrennen dopen 50% aller Athleten mit dem Mittel **Epo** und 30% mit **Testosteron**; die restlichen 20% sind sauber. Die anschließende Dopingprobe gibt bei 10% aller Epo–Doper, 60% aller Testosteron–Doper und bei keinem der sauberen Fahrer ein positives Ergebnis.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Dopingprobe negativ ist? *(3 Punkte)*

(b) Eine Dopingprobe ist positiv. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fahrer mit Epo gedopt hat? *(3 Punkte)*

(c) Sind die Ereignisse „Ein Fahrer dopt" und „Eine Dopingprobe ist positiv" stochastisch unabhängig? *(4 Punkte)*

H

Aufgabe 6 **[5 Punkte]**

Berechnen Sie

$$\oint_\Gamma \frac{z^3 + 2z}{(z-1)^3}\, dz\,,$$

wobei $\Gamma = \partial B_2(0) \subset \mathbb{C}$ die Kreislinie mit Radius 2 ist.

I

Aufgabe 7 **[6 Punkte]**

Bestimmen Sie alle Singularitäten von $\tan\left(\frac{1}{z}\right)$.

Sind alle Singularitäten isoliert?

K

Aufgabe 8 **[15 Punkte]**

Man berechne mit dem Residuensatz das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1 + x^2}\, dx \qquad \text{(hierbei sei } x \in \mathbb{R})$$

und leite daraus den Wert von

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1 + x^2}\, dx$$

ab.

Aufgabe A

a) W

b) W

c) f

d) f

e) f

f) f

Aufgabe B

① für ε, δ Abschätzung richtig

①

a) Setze $f(x) = x$. Es gilt $f_n \to f$ glm auf $\mathbb{R}$. Bew.: Sei $\varepsilon > 0$, Wähle $N(\varepsilon) = \frac{1}{4\varepsilon^2}$.

Für $n > N(\varepsilon)$ gilt:

④

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{x}{1+nx^2} \right| \leq \frac{|x|}{2\sqrt{n}|x|} \quad ; \text{ da } 1+nx^2 \geq 2\sqrt{n}|x| \Leftarrow (1-\sqrt{n}x)^2 \geq 0$$

$$\leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon.$$

b) . $f_n'(x) = \dfrac{3nx^2 + n^2x^4}{(1+nx^2)^2}$ ②

. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ②

. Da $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'$ unstetig konv. f_n' nicht glm. ②

Aufgabe C

$$\int_{\partial B} \langle V, N \rangle \, do(x,y,z) \underset{\text{Gauß}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_B \operatorname{div} V \, d(x,y,z) \qquad (1)$$

Nun ist $\operatorname{div} V = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ (2)

B in Kugelkoordinaten:

$$x = a \cos(\varphi) \sin(\upsilon) r$$
$$y = b \sin(\varphi) \sin(\upsilon) r$$
$$z = c \cos(\upsilon) r \qquad (3)$$

$0 < r < 1$
$0 < \varphi < 2\pi$
$0 < \upsilon < \pi$

Funktionaldeterminante $= r^2 \sin(\upsilon) \, a \cdot b \cdot c$ (3)

Damit (Transformationsformel)

$$\int_B \operatorname{div} V \, d(x,y,z) =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^1 r^2 \sin(\upsilon) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \cdot abc \; dr \, d\upsilon \, d\varphi$$

$$= \frac{2\pi}{3} \left(\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \right) \int_0^{\pi} \sin(\upsilon) \, d\upsilon$$

$$= \frac{2\pi}{3} \, \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{abc} \cdot \left(-\cos(\upsilon) \Big|_0^{\pi} \right)$$

$$= \frac{4\pi}{3} \, \frac{(bc)^2 + (ac)^2 + (ab)^2}{abc} \qquad (6)$$

Aufgabe D Setze $u(x,t) = f(x)\cdot g(t)$ $\qquad \dot{} \,\hat{=}\, \frac{d}{dt}$, $' \,\hat{=}\, \frac{d}{dx}$ 1

$$\Rightarrow 0 = u_t - i u_{xx} = f(x)\dot{g}(t) - i f''(x) g(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{i f''(x)}{f(x)} = \frac{\dot{g}(t)}{g(t)} = K \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$$ (f, g komplexwertig)
K konstant.

$$\Rightarrow f''(x) + iKf(x) = 0$$

$$\wedge \ \dot{g}(t) - Kg(t) = 0$$ 2

$$\Rightarrow g(t) = c\, e^{Kt}$$

$$f(x) = a\cdot e^{\sqrt{-iK}x} + b\, e^{-\sqrt{-iK}x}$$ 1

Mit $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$

folgt $f'(0) = 0 = f'(\pi)$

Damit $a = b \Rightarrow f(x) = 2a\cos(\sqrt{-iK}\,x)$

und $0 = 2a\sqrt{-iK}\,\sin(\sqrt{-iK}\,\pi)$ 1

$$\Leftrightarrow e^{2\sqrt{-iK}\pi} = 1 = e^{2\pi i \lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$$

$$\Leftrightarrow K = \frac{\lambda^2}{i}$$ 1

Also $f(x) = 2a\cos(\lambda x)$, $\quad \lambda \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$

und $g(t) = c\, e^{-i\lambda^2 t}$

2

Aus der Linearität der Gleichung folgt, dass ①

mit $f(x) \cdot g(t)$ auch jede Linearkombination Lösung

ist, d.h.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{N} b_k \cos(kx) \cdot e^{-ik^2 t}$$ ist ebenfalls Lösung.

①

Mit der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = 1 + \cos(2x) \quad , \quad x \in (0,\pi)$$

folgt

$$u(x,0) = \sum_{k=0}^{N} b_k \cos(kx) = 1 + \cos(2x)$$

②

Also

$$b_0 = 1$$
$$b_2 = 1$$
$$b_k = 0 \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0,2\}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \underline{\underline{1 + \cos(2x) e^{-i4t}}}$$

①

Aufgabe E

a) $\underline{\underline{\frac{5}{13}}}$ 2

b) $\frac{5}{13} \cdot \frac{5}{13} = \underline{\underline{\frac{25}{169}}}$ 2

c) A = erste Kugel schwarz
B = zweite Kugel blau

$A \cap B \neq \emptyset$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ 4

$= \frac{3}{13} + \frac{5}{13} - \frac{3}{13} \cdot \frac{5}{13}$

$= \underline{\underline{\frac{8}{13} - \frac{15}{169}}}$ 2

Aufgabe F

a) f

b) f

c) w

d) w

e) w

f) f

Aufgabe G

E = Fahrer dopt mit Epo

T = Fahrer dopt mit Testosteron

S = Fahrer ist sauber

DP = Dopingprobe ist positiv

DN = Dopingprobe ist negativ

$P(E) = 0{,}5$; $P(T) = 0{,}3$; $P(S) = 0{,}2$; $P(DP|E) = 0{,}1$

$P(DP|T) = 0{,}6$; $P(DP|S) = 0$

a) $P(DN) \overset{1}{=} 1 - P(DP) = 1 - \big(P(E)P(DP|E) + P(T)P(DP|T)\big)$ 1

$= 1 - \frac{23}{100} = \frac{77}{100}$ 1

b) $P(E|DP) = \frac{P(E \cap DP)}{P(DP)} = \frac{P(DP \cap E)}{P(E)} \frac{P(E)}{P(DP)}$ 2

$= P(DP|E) \frac{P(E)}{P(DP)} = \frac{5}{23}$ 1

c) Es gilt $P(\text{"Ein Fahrer dopt"}) = P(E \cup T) = P(E) + P(T)$

$= 0{,}8$ 1

und $P(\text{"Ein Fahrer dopt"} \cap DP) = P((E \cap DP) \cup (T \cap DP))$

$= P(E \cap DP) + P(T \cap DP) = P(DP|E)P(E) + P(DP|T) \cdot P(T)$

$= 0{,}23$ 2

$\neq P(\text{"Ein Fahrer dopt"}) \cdot P(DP) = 0{,}8 \cdot 0{,}23$

$\Rightarrow$ Diese Ereignisse sind nicht stochastisch unabhängig. 1

Aufgabe 11

$$\frac{2\pi i}{2\pi i} \frac{2!}{2!} \oint_\Gamma \frac{z^3 + 2z}{(z-1)^{2+1}} \, dz$$

Cauchy Intformel
$n=2$

$$= \frac{2\pi i}{2!} \cdot \left(\left(\frac{d}{dz}\right)^2 z^3 + 2z \Big|_{z=1} \right)$$

$1 \in \mathrm{Int}(\Gamma)$ 3

$$= \pi i \quad 6 \quad = \underline{\underline{6\pi i}}$$

2

Aufgabe I

Es gilt $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

$\Rightarrow$ Die Singularitäten von $\tan(\frac{1}{z})$ sind $z^* = 0$ 1 und die Nullstellen von $\cos(\frac{1}{z})$, d.h.

$$z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k\pi} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}.$$ 2

Die Singularitäten z_k sind isoliert. 1

Aus $\lim_{k \to \infty} z_k = 0$ 1 folgt, dass z^* keine isolierte Singularität von $\tan(\frac{1}{z})$ ist. 1

Aufgabe 7

$$f(z) = \frac{z-1+1}{z-1} e^{\frac{1}{1-z}}$$

$$= e^{\frac{1}{1-z}} + \frac{1}{z-1} e^{\frac{1}{1-z}} = e^{\frac{-1}{z-1}} + \frac{1}{z-1} e^{-\frac{1}{z-1}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{(z-1)^l} + \frac{1}{z-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{(z-1)^l}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{(z-1)^l} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{(z-1)^{l+1}}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} \frac{1}{(z-1)^l} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \frac{1}{(z-1)^l}$$

$$= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^l}{l!} + \frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!} \right) \frac{1}{(z-1)^l}$$ 3

$$\Rightarrow \operatorname{Res}(f,1) = \frac{(-1)^1}{1!} + \frac{(-1)^0}{0!} = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}$$ 2

Ferner sieht man an der Laurentreihe um 1 von f, dass $z_0 = 1$ eine <u>wesentliche</u> Singularität ist.

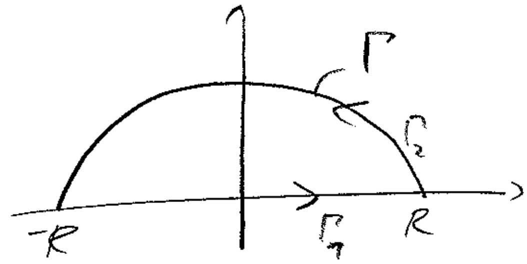
2

1

Aufgabe K

Setze $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{1+z^2} \quad z \in \mathbb{C}$ 1

Betrachte
$$\int_\Gamma f(z)\,dz$$



Mit $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$\Gamma_1(t) = t, \quad t \in [-R, R], \quad \Gamma_1'(t) = 1$ 4

$\Gamma_2(t) = Re^{it}, \quad t \in [0, \pi], \quad \Gamma_2'(t) = iRe^{it}, \quad R > 1$

Ferner hat f in $z = \pm i$ Pole erster Ordnung, davon liegt nur i im Inneren von Γ 1

$\Rightarrow \quad \operatorname{Res}(f, i) = \lim\limits_{z \to i} \dfrac{(z-i)\, e^{iz}}{1+z^2} = \dfrac{e^{-1}}{2i}$ 1

Also $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \underline{\underline{\pi e^{-1}}}$ 1

Ferner $\displaystyle\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz \xrightarrow[R \to \infty]{} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$ 1 (Ex. als uneigentliches Riemannintegral)

$$\left| \int_{\Gamma_2} f(z)\,dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{iR e^{iRe^{it}} e^{it}}{1+(Re^{it})^2}\,dt \right| \le \int_0^\pi \frac{\left| R e^{iR(\cos(t) + i\sin(t))} \right|}{\left| 1 + (Re^{it})^2 \right|}\,dt$$

4

$$\le \frac{R}{R^2-1} \int_0^\pi \underbrace{e^{-R\sin(t)}}_{\le 1}\,dt \le \frac{\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{R \to \infty} 0$$

Damit also

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-1}$$ (1)

Durch Vergleich von Real und Imaginärteil

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

folgt $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-1}$$ (1)

Aufgabe 2

a) f

b) f

c) W

d) w

e) w

f) f

Aufgabe N1 (LR-Zerlegung mit Pivotisierung)
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ 18 & -3 & 33 \\ 6 & 15 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R sowie die Permutationsmatrix P mit $PA = LR$ explizit an.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der in Teilaufgabe a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Kreuzen Sie auf dem dafür vorgesehenen Blatt alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie Null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe 10 kann nicht negativ werden.

1 Die Cholesky-Zerlegung einer orthogonale Matrix A wird zur schnellen Lösung von linearen Gleichungssystem verwendet.

2 Ist die LR-Zerlegung einer Matrix A ohne Pivotisierung durchführbar, dann $\det(L) = 1$.

3 Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det(A) \neq 0$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x, b \in \mathbb{R}^n$ und die Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Ist die rechte Seite b durch Δb gestört, so gilt für den relative Fehler der Lösung die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A\|^{-1} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad \text{mit} \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

4 Die Lösung von $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$ per Gaußelimination benötigt $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops (nur Multiplikationen und Additionen).

3+2+2 Punkte

Aufgabe N2

Gegeben seien das Intervall $I = [0, 1]$ und die Funktion $f(x) = \frac{2}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die Funktion $f(x)$ genau einen Fixpunkt $x_* \in I$ besitzt.

b) Wie viele Iterationen sind ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ höchstens nötig, damit die Approximation x_k des Fixpunktes x_* einen Fehler $|x_k - x_*|$ kleiner als $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot 10^{-4}$ aufweist?

c) Kreuzen Sie auf dem dafür vorgesehenen Blatt alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe 11 kann nicht negativ werden.

1 Bei der Lösung von $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens muß in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Systemmatrix $A = f'(x)$ ist immer orthogonal und kann daher einfach invertiert werden.

2 Sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt, dann ist die a-posteriori Fehlerabschätzung mindestens ebenso genau wie die a-priori Abschätzung.

3 Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung mit einem geeignetem Startwert konvergiert mindestens linear.

4 Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D$. Erfüllt $f(x)$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, so konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen die Nullstelle von $f(x)$.

3+2+2 Punkte

Aufgabe N3 (Lineare Ausgleichsrechnung)
Gegeben sind die Punkte

x_i	-1	1	0
y_i	-1	-4	2

Diese Punkte sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = \alpha\left(3x^2 - 1\right) + \beta\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - 1\right)$$

liegen.

a) Formulieren Sie das zugehörige Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe eine QR-Zerlegung von A über Housholder-Reflektion. Wie groß ist das Residuum?

c) Kreuzen Sie auf dem dafür vorgesehenen Blatt alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe 12 kann nicht negativ werden.

1 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n$, mit $\mathrm{Rang}(A) \leq n$. Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist eindeutig.

2 Um eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mittels Givens-Rotationen auf oberer Dreiecksgestalt zu transformieren, dürfen keine Nullen auf der Diagonale von A stehen. Ansonst kann es passieren, dass man durch Null dividiert und es kann keine Dreiecksgestalt erreicht werden.

3 Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n$, und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\mathrm{Rang}(A) = n$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, so daß $QA = R$ gilt. Dann

$$\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Qb\|_2 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

4 Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n$, $b \in \mathbb{R}^m$, und Θ die Winkel zwischen dem Vektor b und Bild von A. Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \to \min$ durch Normalengleichungen $Bx = c$ mit $B = A^T A$ und $c = A^T b$ hat den Nachteil, daß die Rundungsfehler mit $\kappa_2(B) = \kappa_2(A)^2$ verstärkt werden. Falls $\cos\Theta \approx 1$ führt das zu einer instabilen Methode.

2+3+2 Punkte

Aufgabe N4 (Polynominterpolation)
Gegeben ist folgene Tabelle:

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
f_i	7	7	5	1

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ durch die obige Wertepaare in der Newton-Form.

b) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Neville-Aitken-Schema an der Stelle $x = 2.5$ aus.

c) Kreuzen Sie auf dem dafür vorgesehenen Blatt alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe 13 kann nicht negativ werden.

1 Das Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ ist eindeutig bestimmt.

2 Die Lagrangeschen Grundpolynome nehmen an einer Stützstelle den Wert 1 an und an allen anderen Stützstellen den Wert Null.

3 Polynominterpolation durch drei verschiedene Wertepaare ergibt immer ein Polynom genau zweiten Grades.

4 Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Auf dem Interval $[a, b]$ gilt für den Interpolationsfehler

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(f|x_0, x_1, x_2)| \le \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| * \max_{x\in[a,b]} \frac{|f''(x)|}{3!},$$

wobei $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$.

3+2+2 Punkte

Kreuzen Sie in der folgenden Tabelle die jeweils richtigen Antworten zu den Aufgaben N1-N4 (jeweils Aufgabenteil c) an.

Hinweis: Es kann jeweils mehr als eine Antwort richtig sein.

	Aussage 1	Aussage 2	Aussage 3	Aussage 4
N1 c)	☐	☒	☐	☒
N2 c)	☐	☒	☒	☐
N3 c)	☐	☐	☒	☒
N4 c)	☒	☒	☐	☐

Aufgabe N1 (*LR*-Zerlegung mit Pivotisierung)
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ 18 & -3 & 33 \\ 6 & 15 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -13 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L und R sowie die Permutationsmatrix P mit $PA = LR$ explizit an.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ unter Verwendung der in Teilaufgabe a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie Null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe N1 kann nicht negativ werden.

☐ Die Cholesky-Zerlegung einer orthogonale Matrix A wird zur schnellen Lösung von linearen Gleichungssystem verwendet.

☒ Ist die LR-Zerlegung einer Matrix A ohne Pivotisierung durchführbar, dann $\det(L) = 1$.

☐ Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\det(A) \neq 0$. Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $x, b \in \mathbb{R}^n$ und die Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ bzw. die zugehörige Matrixnorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Ist die rechte Seite b durch Δb gestört, so gilt für den relative Fehler der Lösung die Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| \, \|A\|^{-1} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \quad \text{mit} \quad A(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

☒ Die Lösung von $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $x, b \in \mathbb{R}^n$ per Gaußelimination benötigt $\frac{1}{3}n^3 + \mathcal{O}(n^2)$ Ops (nur Multiplikationen und Additionen).

3+2+2 Punkte

Lösung:

a) Berechne LR-Zerlegung von A.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 12 & -6 & 18 \\ 18 & -3 & 33 \\ 6 & 15 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{T(1,2)} &\begin{pmatrix} 18 & -3 & 33 \\ 12 & -6 & 18 \\ 6 & 15 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\begin{array}{c|cc} 18 & -3 & 33 \\ \hline \frac{2}{3} & -4 & -4 \\ \frac{1}{3} & 16 & -8 \end{array}\right) \\
\xrightarrow{T(2,3)} &\left(\begin{array}{c|cc} 18 & -3 & 33 \\ \hline \frac{1}{3} & 16 & -8 \\ \frac{2}{3} & -4 & -4 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 18 & -3 & 33 \\ \hline \frac{1}{3} & 16 & -8 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -6 \end{array}\right)
\end{aligned}$$

Also die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung lautet

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 18 & -3 & 33 \\ 0 & 16 & -8 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und es ist $PA = LR$.

b) Wir lösen das Gleichungssystem durch Vorwärts-/-Rückwärtseinsetzen, also $Ly = Pb = (1, -13, 6)^T$ und anschließend $Rx = y$. Auf diese Weise erhalten wir $y = \left(1, -\frac{40}{3}, 2\right)^T$ und $x = (1/2, -1, -1/3)^T$.

Aufgabe N2 (Iterative Verfahren)
Gegeben seien das Intervall $I = [0, 1]$ und die Funktion $f(x) = \frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß die Funktion $f(x)$ genau einen Fixpunkt $x_* \in I$ besitzt.

b) Wie viele Iterationen sind ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ höchstens nötig, damit die Approximation x_k des Fixpunktes x_* einen Fehler $|x_k - x_*|$ kleiner als $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot 10^{-4}$ aufweist?

c) Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe N2 kann nicht negativ werden.

- ☐ Bei der Lösung von $f(x) = 0$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit Hilfe des Newton-Verfahrens muß in jedem Iterationsschritt ein lineares Gleichungssystem gelöst werden. Die Systemmatrix $A = f'(x)$ ist immer orthogonal und kann daher einfach invertiert werden.
- ☒ Sind die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes erfüllt, dann ist die a-posteriori Fehlerabschätzung mindestens ebenso genau wie die a-priori Abschätzung.
- ☒ Das Newton-Verfahren zur Nullstellenbestimmung mit einem geeignetem Startwert konvergiert mindestens linear.
- ☐ Sei $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(D) \subset D$. Erfüllt $f(x)$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, so konvergiert die Fixpunktiteration für jeden Startwert $x_0 \in D$ gegen die Nullstelle von $f(x)$.

3+2+2 Punkte

Lösung:

a) Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:
V1) I ist offensichtlich abgeschlossen und konvex.
V2) f ist selbstabbildend, da f ist monoton steigend auf

$$x \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{4}(x+1) \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

und

$$f(0) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} > 0, \qquad f(1) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} < 1.$$

3) Kontraktivität von f. Wegen Mittelwertsatz

$$L := \max_{(x)\in I} |f'(x)| < 1 \Rightarrow F \text{ ist kontrahierend.}$$

Wir haben

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right),$$

und somit ist

$$\max_{(x)\in I}\left|\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)\right| \leq \frac{1}{2} =: L < 1.$$

Bemerkung. Man kann genaue rechnen und zwar

$$\max_{(x)\in I}\left|\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}(x+1)\right)\right| = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} = 0.35355339... =: \hat{L} < 1,$$

da $\cos(x)$ monoton fallend auf $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ist.

Nach dem B. Fixpunktsatz folgt, daß f auf I genau einen Fixpunkt besitzt.

b) Nach der a-priori-Fehlerabschätzung mit $L = \frac{1}{2}$, $x_0 = 0$ und damit $x_1 = f(x_0) = f(0) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{\pi} = 0.45015816...$ gilt

$$|x^* - x_k| \leq \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| \leq \varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow L^k \leq \frac{(1-L)\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot 10^{-4} = 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow k \geq \frac{\log(10^{-4})}{\log(2^{-1})} = \frac{4}{\log(2)} \approx 13.287712,$$

man benötigt also höchstens 14 Iterationen, damit der Fehler sicher kleiner als $\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot 10^{-4}$ ist.

Bemerkung. Für $L = \hat{L}$ gilt

$$L^k \leq \frac{(1-\hat{L})\varepsilon}{|x_1 - x_0|} = \frac{4-\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\cdot 10^{-4} = \frac{4-\sqrt{2}}{2}\cdot 10^{-4} \Leftrightarrow k \geq 8.6114062...,$$

man benötigt also höchstens 9 Iterationen.

Aufgabe N3 (Lineare Ausgleichsrechnung)
Gegeben sind die Punkte

x_i	-1	1	0
y_i	-1	-4	2

Diese Punkte sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = \alpha\,(3x^2 - 1) + \beta\left(\frac{9}{4}x^2 - \frac{7}{4}x - 1\right)$$

liegen.

a) Formulieren Sie das zugehörige Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe eine QR-Zerlegung von A über Housholder-Reflektion. Wie groß ist das Residuum?

c) Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe N3 kann nicht negativ werden.

- ☐ Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n$, mit $\operatorname{Rang}(A) \leq n$. Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist eindeutig.
- ☐ Um eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mittels Givens-Rotationen auf oberer Dreiecksgestalt zu transformieren, dürfen keine Nullen auf der Diagonale von A stehen. Ansonst kann es passieren, dass man durch Null dividiert und es kann keine Dreiecksgestalt erreicht werden.
- ☒ Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n$, und $b \in \mathbb{R}^m$ mit $\operatorname{Rang}(A) = n$. Weiter sei $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine orthogonale Matrix und $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, so daß $QA = R$ gilt. Dann

$$\|Ax - b\|_2 = \|Rx - Qb\|_2 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- ☒ Es seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, m > n$, $b \in \mathbb{R}^m$, und Θ die Winkel zwischen dem Vektor b und Bild von A. Die Lösung des linearen Ausgleichsproblems $\|Ax - b\|_2 \to \min$ durch Normalengleichungen $Bx = c$ mit $B = A^TA$ und $c = A^Tb$ hat den Nachteil, daß die Rundungsfehler mit $\kappa_2(B) = \kappa_2(A)^2$ verstärkt werden. Falls $\cos\Theta \approx 1$ führt das zu einer instabilen Methode.

2+3+2 Punkte

Lösung:

a) Das lineare Ausgleichsproblem lautet: Finde $x = (\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$ so, dass $\|Ax - b\|_2$ minimal ist mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Die Matrix A wird mit Hausholder-Refleksionen auf Dreiecksgestalt gebracht: Die Norm der ersten Spalte der Matrix A beträgt

$$\|a_1\|_2 = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3,$$

und somit errechnet sich der erste Spiegelungsvektor zu

$$v = a_1 + \operatorname{sign}(a_{11})\|a_1\|_2 e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (+1) \cdot 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

mit

$$v^T v = \|v\|_2^2 = 5^2 + 2^2 + (-1)^2 = 30.$$

Die Anwendung der Hausholder-Spiegelung auf A ergibt

$$\begin{aligned} A_1 &:= A - \frac{2}{v^T v} \cdot v \cdot (v^T A) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (5, 2, -1) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (15, 15) = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

die Anwendung auf b liefert

$$\begin{aligned} b_1 &:= b - \frac{2}{v^T v} \cdot v \cdot (v^T b) = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (5, 2, -1) \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} (-15) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir brauchen keine weiterer Spiegelung mehr, da die Matrix A_1 schon die obere Dreiecksgestalt hat. Daraus erhalten wir für Lösung des Ausgleichsproblems

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Ax-b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|A_1x-b_1\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^2} \|Rx-\hat{b}\|_2$$

mit

$$R = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{R} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{pmatrix}.$$

Rückwärtseinsetzen ($\hat{R}x = \hat{b}_1$) liefert:

$$-\frac{5}{2}\beta = -2 \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{4}{5}.$$

$$-3\alpha - 2\beta = 4 \quad \Rightarrow \quad -3\alpha = 4 + \frac{8}{5} = \frac{28}{5} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{28}{15}.$$

Die Lösung des Ausgleichsproblems ist also $x_* = (\alpha,\beta)^T = (-\frac{28}{15}, \frac{4}{5})^T$.
Für das Residuum erhalten wir

$$\|Ax_* - b\|_2 = \|\hat{b}_2\|_2 = 1.$$

Aufgabe N4 (Polynominterpolation)
Gegeben ist folgene Tabelle:

i	0	1	2	3
x_i	2	3	4	5
f_i	7	7	5	1

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$ durch die obige Wertepaare in der Newton-Form.

b) Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ mit dem Neville-Aitken-Schema an der Stelle $x = 2.5$ aus.

c) Kreuzen Sie alle korrekten Aussagen an. Für jede richtige Antwort erhalten Sie einen Punkt, für jede falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie null Punkte. Die Gesamtpunktzahl für Aufgabe N4 kann nicht negativ werden.

- ☒ Das Interpolationspolynom $P(f|x_0, \ldots, x_n)$ ist eindeutig bestimmt.
- ☒ Die Lagrangeschen Grundpolynome nehmen an einer Stützstelle den Wert 1 an und an allen anderen Stützstellen den Wert Null.
- ☐ Polynominterpolation durch drei verschiedene Wertepaare ergibt immer ein Polynom genau zweiten Grades.
- ☐ Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Auf dem Interval $[a, b]$ gilt für den Interpolationsfehler

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x)-P(f|x_0, x_1, x_2)| \leq \max_{x\in[a,b]} |(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)| * \max_{x\in[a,b]} \frac{|f''(x)|}{3!},$$

wobei $a = x_0 < x_1 < x_2 = b$.

Lösung:

3+2+2 Punkte

a) Führe die Newton-Interpolation mit Hilfe der dividierten Differenzen durch:

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_0, x_1, x_2, x_3]f$
2	7			
		0		
3	7		-1	
		-2		0
4	5		-1	
		-4		
5	1			

Es ist also

$$P_3(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x) = 7 - (x-2)(x-3).$$

b) Mit $x_0 = 2$, $x_1 = 3$ und $x_2 = 4$ wende für $x = 2.5$ das Neville-Aitken-Schema an:

$$P_{i,k} = P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}}\left(P_{i-1,k-1} - P_{i,k-1}\right) \quad \text{für} \quad 0 \le k \le i \le n = 2,$$

oder

$$P_{i,k} = \frac{x - x_{i-k}}{x_i - x_{i-k}} P_{i,k-1} + \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-k}} P_{i-1,k-1} \quad \text{für} \quad 0 \le k \le i \le n = 2.$$

Erhalte so das Tableau

i	x_i	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
0	2	$f_1 = 7$		
1	3	$f_2 = 7$	7	
2	4	$f_3 = 5$	8	7.25

denn:

$$P_{1,1} = P_{1,0} + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}(P_{0,0} - P_{1,0}) = 7 + \frac{3 - 2.5}{3 - 2}(7 - 7) = 7,$$

$$P_{2,1} = P_{2,0} + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}(P_{1,0} - P_{2,0}) = 5 + \frac{4 - 2.5}{4 - 3}(7 - 5) = 8$$

und

$$P_{2,2} = P_{2,1} + \frac{x_2 - x}{x_2 - x_0}(P_{1,1} - P_{2,1}) = 8 + \frac{4 - 2.5}{4 - 2}(7 - 8) = 7.25\ .$$

Damit

$$P(f|x_0, x_1, x_2)(2.5) = 7.25\ .$$