Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Sommer 2007

(180 Minuten)

Höhere Mathematik III + IV , Numerik ; HöMa Teil

W i e d e r h o l u n g s k l a u s u r

19.09.2007

Aufgabe 1 **[9 Punkte]**

In Polarkoordinaten wird durch

$$r(\varphi) := \sqrt{\cos(2\varphi)}\,,\ \varphi \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

eine geschlossene Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ definiert. Berechnen Sie den Inhalt der von Γ eingeschlossenen Fläche.

Aufgabe 2 **[12 Punkte]**

Gegeben sei die Fläche

$$\mathcal{F} := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = 8 - \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3,\ x^2 + y^2 < 4\right\}.$$

Das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $V(x,y,z) = (y^3, 0, 0)$. Mit dem Stokesschen Integralsatz berechne man mit einem zur z–Achse weisenden Einheitsnormalen–Vektorfeld N

$$\int\limits_{\mathcal{F}} < \operatorname{rot} V\,,\ N > do\,.$$

Aufgabe 3 **[12 Punkte]**

Die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi, \pi]$, werde 2π–periodisch auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt, so dass also $f(x+2\pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Fourier–Reihe von f bezüglich der Sinus/Cosinus–Orthonormalbasis des $L^2(0, 2\pi)$. *(6 Punkte)*

(b) Mit Hilfe von **(a)** und der Parseval–Gleichung für Fourier–Reihen, zeige man
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\,.$$ *(6 Punkte)*

Bitte wenden !!!

Aufgabe 4 **[12 Punkte]**

Ein Laplace–Würfel soll $n \in \mathbb{N}$ mal geworfen werden. Wir betrachten für $j \in \{1, \ldots, n\}$ die stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen

$$X_j \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad X_j(\omega) := \text{„ Anzahl der Augen beim } j\text{–ten Wurf “}.$$

(a) Welcher Wahrscheinlichkeitsraum ist hier gemeint? *(1 Punkt)*

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y_n)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(Y_n)$ der Summenvariable $Y_n := \sum_{j=1}^{n} X_j$, welche die Anzahl aller geworfenen Augen angibt. *(5 Punkte)*

(c) Zeigen Sie mit Hilfe der Tschebyschow–Ungleichung, dass

$$P\left(\left\{ \left| Y_n - E(Y_n) \right| < \frac{35}{12}\sqrt{n} \right\}\right) \geq \frac{23}{35}.$$ *(6 Punkte)*

Aufgabe 5 **[14 Punkte]**

Bestimmen Sie diejenige Möbius–Transformation, die den Kreis $B_3(2+i) \subset \mathbb{C}$ so auf die untere Halbebene $\{w \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}\, \omega < 0\}$ abbildet, dass der Mittelpunkt der Kreisscheibe in den Punkt $-i$ und der Punkt $2 + 4i$ in den Ursprung übergehen.

Aufgabe 6 **[9 Punkte]**

Sei $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit der Eigenschaft, dass $\left[\mathrm{Im}\,(f(z))\right]^2 < \left[\mathrm{Re}\,(f(z))\right]^2$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Zeigen Sie, dass f konstant ist.

Aufgabe 7 **[12 Punkte]**

Man berechne mit dem Residuensatz das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4\cos(x)}\, dx .$$

A1) Γ ist parametrisiert durch

$$(*)\begin{cases} \gamma(\varphi) = r(\varphi)\,(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) & \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \\ \gamma'(\varphi) = \left(\frac{-\sin(2\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} - \sqrt{\cos(2\varphi)}\sin(\varphi),\ \frac{-\sin(2\varphi)\cdot\sin(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} + \sqrt{\cos(2\varphi)}\cos(\varphi) \right) \end{cases}$$

Die von Γ eingeschlossene Fläche $A(\Gamma)$ berechnet sich mit dem Gaußschen Integralsatz wie folgt:

$V(x,y) = (x,y)$ sei gewähltes Vektorfeld

$$\Rightarrow 2A(\Gamma) = \iint_{A(\Gamma)} \operatorname{div} V \,dx\,dy = 2\iint_{A(\Gamma)} dx\,dy = \int_\Gamma x\,dy - y\,dx$$

Also $A(\Gamma) = \frac{1}{2}\int_\Gamma x\,dy - y\,dx$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos(2\varphi)}\cos(\varphi)\left(\frac{-\sin(2\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} + \sqrt{\cos(2\varphi)}\cos(\varphi)\right)$$

$$- \sqrt{\cos(2\varphi)}\sin(\varphi)\left(\frac{-\sin(2\varphi)\cos(\varphi)}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} - \sqrt{\cos(2\varphi)}\sin(\varphi)\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi)\,d\varphi = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

A1) Alternativ:

Polarkoordinaten (1) $x = r\cos(\varphi)$, $y = r\sin(\varphi)$

Funktionaldet. $r > 0$ (2), $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$

$$K = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{array}{l} x = r(\varphi)\cos(\varphi) \\ y = r(\varphi)\sin(\varphi) \\ 0 \le r \le \sqrt{\cos(2\varphi)} \end{array} \right\}$$

$$\int_K 1 \, dx\, dy \underset{(3)}{\overset{\text{Trafo}}{=}} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}} r \, dr \, d\varphi$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{\cos(2\varphi)}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\varphi) \, d\varphi \overset{(3)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

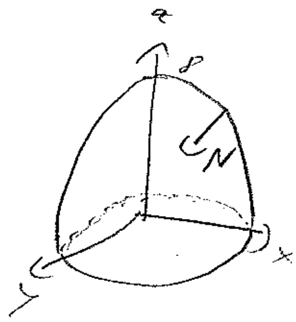
A2)

$$\partial F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4,\ z=0\}, \quad V(x,y,z) = (y^3,0,0)$$

∂F kann parametrisiert werden durch

$$\gamma(t) = 2(\cos(t), \sin(t), 0) \quad 3 \quad t \in [0,2\pi)$$

$$\gamma'(t) = 2(-\sin(t), \cos(t), 0) \quad 1$$



Mit dem zur z-Achse weisenden Normalenfeld von F bildet die Orientierung von γ eine Linksschraube 1

Daher gilt mit dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_F \langle \operatorname{rot} V, N \rangle \, do = -\int_{\partial F} V \, ds \quad 2$$

$$= -\int_0^{2\pi} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt = -\int_0^{2\pi} (2\sin(t))^3 \cdot (-2\sin(t)) \, dt$$

1

$$= 16\int_0^{2\pi} \sin^4(t) \, dt = 16 \int_0^{2\pi} \sin^2(t) - \sin^2(t)\cos^2(t) \, dt$$

$$= \underbrace{16 \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \, dt}_{I} - \underbrace{16 \int_0^{2\pi} \sin^2(t)\cos^2(t) \, dt}_{II} = 16\pi - 4\pi = \underline{\underline{12\pi}}$$

4

$I = 16\pi$

$II = 4\pi$

A3)

a)

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

1

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \, dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = \frac{\pi^2}{3}$$ 1

$$\underset{k \geq 1}{a_k} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(\underbrace{\frac{x^2 \sin(kx)}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{2}{k}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin(kx)\, dx \right)$$

$$= \frac{-2}{k\pi}\left(\frac{-x\cos(kx)}{k}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{k}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\, dx \right)$$

$$= \frac{4}{k^2}\cos(k\pi) = \underline{\underline{\frac{4}{k^2}(-1)^k}}$$ 3

$b_k = 0 \quad \forall k \geq 1$, da f eine gerade Funktion ist. 1

Also $$S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{k^2}\cos(kx) \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

b) <u>Parseval-Gleichung:</u> $$\underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx}_{I} = \underbrace{\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)}_{II}$$

Nun ist $I = \underline{\underline{\frac{2\pi^4}{5}}}$

$$II = \frac{4\pi^4}{2 \cdot 9} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi^4}{5} = \frac{2\pi^4}{9} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{k^4}$$ 6

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \underline{\frac{\pi^4}{90}}$$

A 4)

a) $\Omega = \{1, \dots, 6\}^n$ 1

b) $$E(Y_n) = E\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \overset{\text{Linearität}}{\overset{!}{=}} \sum_{j=1}^{n} E(X_j) = \underline{\underline{n\, E(X_j)}} \overset{1}{=} n \frac{7}{2}$$

$$Var(Y_n) = Var\left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{stoch. unabhängig}}}{=} \sum_{j=1}^{n} Var(X_j) = \underline{\underline{n\, Var(X_j)}} \overset{1}{=} n \frac{35}{12}$$

Da $E(X_j) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$ 1

und

$$Var(X_j) = E(X_j^2) - E(X_j)^2 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{6} i^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \underline{\underline{\frac{35}{12}}}$$ 2

c) Tschebyschow-Ungl. Für alle $a > 0$ gilt:

$$P(\{|Y_n - E(Y_n)| \geq a\}) \leq \frac{Var(Y_n)}{a^2}$$

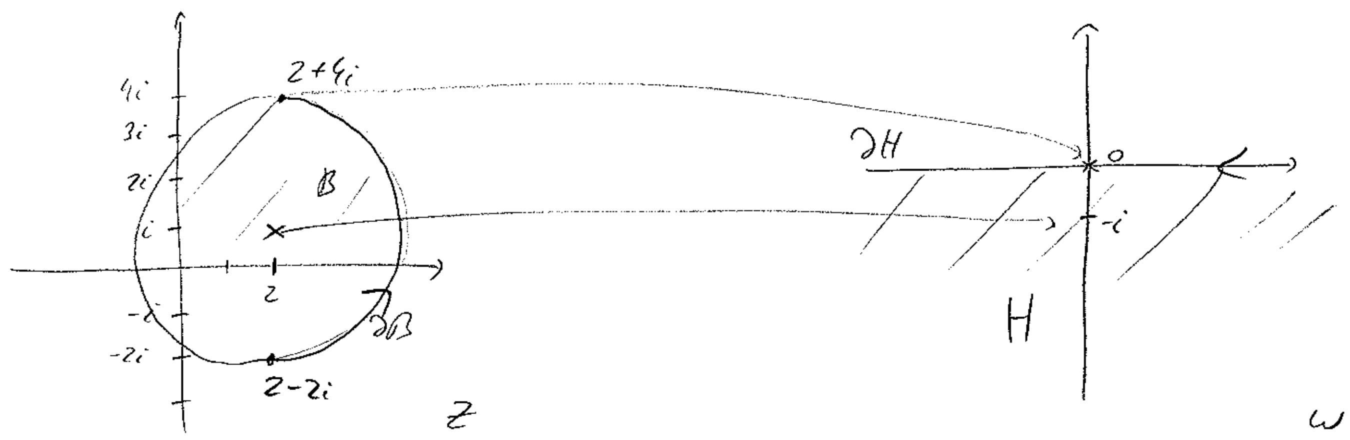
$$\Leftrightarrow \underbrace{1 - P(\cdots)} \geq 1 - \frac{Var(Y_n)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow P(\{|Y_n - E(Y_n)| < a\}) \geq 1 - \frac{Var(Y_n)}{a}$$ 4

Setze $a = \frac{35}{12}\sqrt{n}$

$$\Rightarrow P\left(\left\{|Y_n - E(Y_n)| < \frac{35}{12}\sqrt{n}\right\}\right) \geq 1 - \frac{\cancel{n}\,\frac{35}{12}}{\left(\frac{35}{12}\right)^2 \cancel{n}} = \underline{\underline{\frac{23}{35}}}$$ 2

A5)



$z_1 = 2+4i \longrightarrow 0 = w_1$

$z_2 = 2+i \longrightarrow -i = w_2$

$z_3 = 2-2i \longrightarrow \underline{\underline{\infty = w_3}}$

6 Punkteformel $(w_3 = \infty)$

$$\frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{w-w_1}{w-w_2} \quad 4$$

Also $$\frac{(z-2-4i)(2+i-2+2i)}{(z-2-i)(2+4i-2+2i)} = \frac{w-0}{w+i}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{w = \frac{iz+4-2i}{z-2+2i}}} \quad 6$$

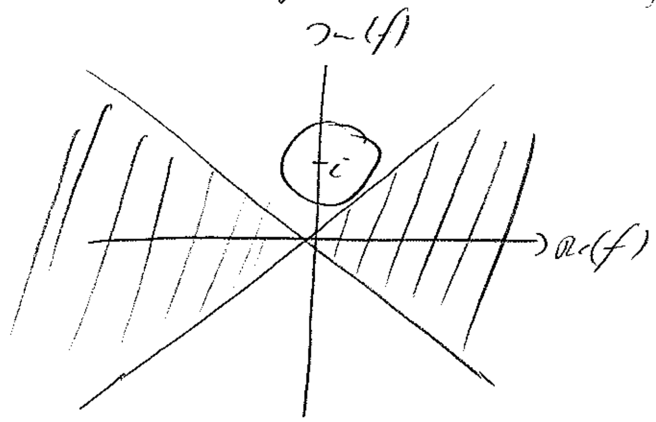
Da $\partial B \to \partial H$ und das links von ∂B liegende Gebiet auf das links von ∂H liegende Gebiet abgebildet wird. (Symmetrie) und ferner die vertikale Gerade die Achse Re(z) im 90° Winkel schneidet

$\to$ Winkeltreue liefert $2-2i \to \infty$ 4

A6)

$$(\mathrm{Im}(f))^2 < (\mathrm{Re}(f))^2$$

Skizze:



Wähle $B_{\frac{1}{2}}(i) \subset \mathbb{C}$, dann gilt $B_{\frac{1}{2}}(i) \not\subset \mathrm{Bild}(f)$

Also $|f(z)-i| > \frac{1}{2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

9

$\Rightarrow \frac{1}{|f(z)-i|} < 2$, d.h. $\left|\frac{1}{f(z)-i}\right|$ beschränkt

Liouville
$\Rightarrow \frac{1}{f(z)-i}$ ist konst $\to f$ ist konstant.

Alternativ: Betrachte $e^{-f(z)^2}$ (holomorph, da Verkettung holomorpher Fu.)

Dann gilt:

$$|e^{-f(z)^2}| = |e^{-\mathrm{Re}^2 f(z) + \mathrm{Im}^2 f(z) - 2i\,\mathrm{Re} f\,\mathrm{Im} f}|$$

9

$= e^{\underbrace{\mathrm{Im}^2 f(z) - \mathrm{Re}^2 f(z)}_{<0}} < 1$, d.h. e^{-f^2} ist beschränkt

Liouville
$\Rightarrow e^{-f(z)^2}$ ist konstant, d.h. $\exists\, c \in \mathbb{C}\setminus\{0\}: e^{-f(z)^2} = c \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

$\Rightarrow f(z)^2 = -(\mathrm{Log}(c) + 2\pi i k(z)) \qquad k(z) \in \mathbb{Z}$

Stetigkeit von f^2 liefert $k(z) = k_0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(z)^2 = \tilde{c} \overset{f \text{ stetig}}{\Rightarrow} f$ konstant.

A7)

subst: $e^{ix} = z$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos(x)}\,dx \overset{4}{=} \int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)} \frac{ie^{ix}}{ie^{ix}}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{dz}{(5+2(z+z^{-1}))iz}$$

$$= \int_{|z|=1} \frac{dz}{5iz+2iz^2+2i} = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{\underbrace{z^2+\frac{5}{2}z+1}_{N}}$$

Nst. von N

$$z_{1,2} = \frac{-5}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2-1} = \frac{-5}{4} \pm \sqrt{\frac{25-16}{16}}$$

$$= \frac{-5 \pm 3}{4} \quad 2 \quad \Rightarrow \underline{\underline{z_1 = -2,\ z_2 = -\frac{1}{2}}} \quad 2$$

Davon nur $z_2 = -\frac{1}{2} \in \{|z|<1\}$ 1

$$\Rightarrow \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+\frac{5}{2}z+1} = \frac{2\pi i}{2i} \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2+\frac{5}{2}z+1}, z=-\frac{1}{2}\right) \quad 1$$

$$= \frac{2\pi i}{2i} \lim_{z\to -\frac{1}{2}} \frac{(z-(-\frac{1}{2}))}{(z-(-2))(z-(-1/2))} = \frac{2\pi i}{2i} \frac{1}{(-\frac{1}{2}+2)} = \frac{\pi}{\frac{3}{2}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}}}$$

2