Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen

Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2001

Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:

(8)

$$(2n)! \; < \; (n!)^2 \cdot 4^{n-1} \qquad (n = 5, 6, 7, \ldots) \; .$$

Aufgabe 2: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(6)

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{n+3} \; - \; \sqrt{n+1}\right)^2}{\sqrt{n}} \quad ,$$ **(b)** $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} - n^2}{\left(\log 8\right)^{2n}} \; .$$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f: \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

(7)

$$f(x) \; = \; \begin{cases} 1 \; + \; \left(7 + \sin\sqrt{|x|}\right) x \; - \; x^2 \cos\dfrac{1}{x} & \text{für} \quad x \neq 0 \;\; , \\ 1 & \text{für} \quad x = 0 \;\; . \end{cases}$$

Man beweise, daß $f'(0) = 7$ ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ angibt mit:

$$0 \; < \; |x - 0| \; < \; \delta(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{f(x) - f(0)}{x \; - \; 0} \; - \; 7 \right| \; < \; \varepsilon \; .$$

Aufgabe 4: Man berechne

(8)

(a) $$\int e^{\sqrt{3x-1}} \, dx \qquad \left(x \; \geq \; \frac{1}{3}\right) \quad ,$$ **(b)** $$\int_0^{e - \frac{1}{e}} \frac{x^2 \; dx}{\sqrt{x^2 + 4}} \quad .$$

Aufgabe 5: Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

(11)

$$\begin{cases} (*) \quad e^{2x} u'(x) \; + \; e^x (e^x + 2) \; u(x) \; = \; 1 \; + \; e^{2x} u^2(x) \; , \; x \geq 0 \; , \\ u(0) \; = \; \dfrac{3}{2} \quad . \end{cases}$$

(a) Man beweise, daß es eine partikuläre Lösung $u(x) = e^{\alpha x}$ mit einem geeigneten $\alpha \in \mathbb{R}$ von $(*)$ gibt.

(b) Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems.

Aufgabe 6: Gegeben sei die Fläche $\mathcal{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = \dfrac{1}{4} \, x^2 + \dfrac{1}{8} \, y^2 , \; x^2 + y^2 \leq 25\right\}.$

(6)

Man beweise:

Es gibt genau eine Tangentialebene E an $\mathcal{F}$, welche auf $\underline{\nu} = (1, 1, 1)$ senkrecht steht. Man bestimme den Abstand d des Nullpunktes von E .

---

b i t t e w e n d e n !!!

Aufgabe 7: Gegeben sei die Fläche

(7)

$$\mathcal{F} \ = \ \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 \ + \ y^2 \ = \ (1-z)^2, \quad -1 \ \le \ z \ \le \ 1\Big\}$$

und das Vektorfeld

$$\underline{a}(x,y,z) \ = \ \big(x - yz, 2x + yz, -3xy^2\big) \ , \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ .$$

Es sei $\underline{n} = \underline{n}(x,y,z)$ der Normalenvektor auf $\mathcal{F}$ mit negativer z–Komponente. Mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechne man

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \text{rot } \underline{a} \cdot \underline{n} \ do \ .$$

Aufgabe 8: Gegeben sei die Funktionenfolge $\Big\{f_n(x)\Big\}_{n=1}^{\infty}$ mit

(9)

$$f_n(x) \ := \ \frac{2n^2 x}{(n^2 + x^2)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N}) \ .$$

(a) Man berechne $f(x) \ := \ \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) \quad (x \in \mathbb{R})$.

(b) Man beweise, daß $\{f_n\}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft angibt:

$$x \in \mathbb{R} \ \wedge \ n \ > \ N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \ < \ \varepsilon \ .$$

(c) Man beweise: $\lim\limits_{n \to \infty} \displaystyle\int_0^{\infty} f_n(x) \ dx \ \neq \ \int_0^{\infty} f(x) \ dx$.

Aufgabe 9: Es sei $\alpha \in (0,1)$ fest.

(10)

(a) Man beweise, daß durch

$$f(x;\alpha) \ = \ \begin{cases} \alpha \ e^{-x} \ + \ \dfrac{3(1-\alpha)}{(1+x)^4} & \text{für} \quad x \ge 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X gegeben ist.

(b) Man bestimme die zugehörige Verteilungsfunktion F.

(c) Man bestimme $E(X)$ (in Abhängigkeit von α) .

Aufgabe 10: Es sei $f : \ \mathbb{C} \setminus \{0, -2\} \ \longrightarrow \ \mathbb{C}$ mit $f(z) \ := \ \dfrac{1}{z(z+2)^3}$.

(9)

Geben Sie für alle möglichen Laurentreihenentwicklungen von f um den Punkt $z_0 = -2$ die Koeffizienten der Laurentreihen explizit an.

Aufgabe 11: Man bestimme die (eindeutig bestimmte) Lösung des Randwertproblems

(9)

$$\begin{cases} u_{xx} \ + \ u_{yy} \ = \ 0 \quad \text{in} \quad x^2 \ + \ y^2 \ < \ R^2 \ , \\ u(x,y)\Big|_{x^2 \ + \ y^2 \ = \ R^2} \ = \ u\big(R\cos\vartheta, R\sin\vartheta\big) \ = \ 8R^4 \ \sin^4\vartheta \ . \end{cases}$$
