Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2001

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: Gegeben sei das Vektorfeld

(10)

$$\underline{f} \;=\; \underline{f}(x,y) \;= |\, y - ax \,| \;\; (1,-1)\;, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,\; a \in \mathbb{R}\;.$$

Mit dem 1. Hauptsatz über Kurvenintegrale bestimme man alle reellen Zahlen $a > 0$, für die

$$\int\limits_{\Gamma} \underline{f}\; d\underline{x} \qquad (\Gamma \text{ Kurve im } \mathbb{R}^2)$$

im $\mathbb{R}^2$ vom Wege unabhängig ist.

Aufgabe 2: Gegeben seien das Vektorfeld

(9)

$$\underline{f} \;=\; \underline{f}(x,y) \;=\; \left(x^5 + y^3 + \cos(x^3)\;,\; x^3 - 5x + e^{y^2}\right)\;, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\;,$$

und der im mathematisch positiven Sinn durchlaufene Rand ∂G des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$.
Man berechne mit dem Gaußschen Satz

$$\int\limits_{\partial G} \underline{f}\; d\underline{x}\;\;.$$

Aufgabe 3: Gegeben sei die Koordinatentransformation

(9)

$$T: \begin{array}{rcll} x &=& u^{2/3} & v^{1/3} \\ y &=& u^{1/3} & v^{2/3} \end{array} \qquad , \quad (u,v > 0)\;.$$

(a) Man bestimme die Umkehrtransformation T^{-1} und $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

(b) Man bestimme das Bild der Parabeln

$$y^2 = 2x\;,\; y^2 = 4x\;,\; y = x^2,\; y = 4x^2 \quad (x,y > 0)$$

in der (u,v)–Ebene .

(c) Man berechne den Flächeninhalt des endlichen Gebietes zwischen den 4 Parabeln durch Gebietstransformation .

---

b i t t e   w e n d e n !!

Aufgabe 4: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(7)

$$\int_0^\infty \frac{\sin\ \dfrac{1}{x}}{(1+x)\sqrt{\log\ (1+x)}}\ dx\ .$$

Aufgabe 5: **(a)** Ein idealer Würfel enthalte je zweimal die Ziffern 1,2 und 3.

(5)

Die Zufallsvariable X beschreibe die geworfene Augenzahl. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$, die Varianz $\mathrm{Var}(X)$ und die Streuung $\sigma(X)$.

(b) Jemand bietet gegen **10 DM** Einsatz folgende Spiele an:

Spiel 1: Würfeln mit 3 idealen Würfeln obiger Art. Zu jeder gewürfelten Augenzahl wird 1 addiert und dann die Summe in **DM** ausgezahlt.

Spiel 2: Würfeln mit 3 idealen Würfeln obiger Art. Die doppelte Summe der Augenzahlen wird in **DM** ausgezahlt.

Auf welches Spiel kann man sich mit (mathematisch begründeter) Aussicht auf Gewinn einlassen ?

Hinweis: Berechnen Sie die entsprechenden Erwartungswerte.

Aufgabe 6: Man bestimme alle linear–gebrochenen Abbildungen

(5)

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ ,$$

die folgende drei Eigenschaften gleichzeitig erfüllen:

(i) $f(z)$ ist auf $\mathbb{C}$ konform ;

(ii) $f\Big(\big\{z \in \mathbb{C} : |\ z\ | < 1\big\}\Big) \ = \ \big\{z \in \mathbb{C} : |\ z-1\ | < 1\big\}$;

(iii) für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(ix) \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7: Man berechne

(7)

$$\int_{K_j} \big(z^2 - 2z - 2\big)\ \exp\Big\{-\ \frac{3}{z+2}\Big\}\ dz \qquad (j = 1, 2)$$

längs der positiv orientierten Kurven

$$K_1 \ = \ \big\{z \in \mathbb{C} : |\ z\ | = 1\big\}\ , \quad K_2 \ = \ \big\{z \in \mathbb{C} : |\ z+1\ | = 2\big\}\ .$$
