

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgabe 1: Es sei G das Gebiet, das von den Kurven

$$(10) \quad y^2 = x, \quad y = x^2, \quad x \cdot y = e^2, \quad x \cdot y = e^4$$

begrenzt wird.

- (a) Man skizziere G und beschreibe G durch geeignete Ungleichungen.
(b) Durch die Koordinatentransformation

$$T: G \rightarrow G^* \quad \text{mit} \quad \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = T(x, y) = \begin{pmatrix} \log(xy) \\ \log y \end{pmatrix}$$

wird G eindeutig auf ein Gebiet G^* abgebildet.

Man gebe die Abbildung T^{-1} an und beschreibe G^* durch geeignete Ungleichungen.

- (c) Man berechne $\frac{\partial(x, y)}{\partial(x^*, y^*)}$ und den Flächeninhalt von G .
-

Aufgabe 2: Gegeben seien das Vektorfeld

$$(7) \quad \underline{f}(x, y, z) := (x^5 + y^3, x^3 - 5x z^2 + e^{y^2}, x^3 + y^3 + z^3) \quad ((x, y, z) \in \mathbb{R}^3)$$

und die Raumkurve $K := K_1 + K_2 + K_3$ mit

$$K_1: \gamma_1(t) = (0, -t, -1), \quad -2 \leq t \leq 0;$$

$$K_2: \gamma_2(t) = (t, 0, -1), \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$K_3: \gamma_3(t) = (-t + 2, 2t - 2, -1), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

Mit Hilfe des Stokesschen Satzes berechne man $\int_K \underline{f} \, d\underline{x}$.

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion f mit

$$(12) \quad f(x) = \begin{cases} -x & \text{für } -\pi \leq x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x < \pi \end{cases} \quad \text{und} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

- (a) Man gebe die Definition für „stückweise glatt in $[a, b]$ “ an und prüfe, ob $f(x)$ in $[-\pi, \pi]$ stückweise glatt ist.
(b) Man bestimme die von f erzeugte Fourierreihe $T_f(x)$.
(c) Konvergiert die Fourierreihe $T_f(x)$ in $[-1, 1]$ gleichmäßig? (Begründung!)
(d) Welchen Wert hat die Fourierreihe an der Stelle $x = 0$?
-

Aufgabe 4: In der Stadt A regnet es durchschnittlich an 3 von 5 Tagen. Wenn Regen vorhergesagt wurde, dann wird es sogar mit 80% Wahrscheinlichkeit regnen. Bleibt es trocken, so wurde in drei Viertel der Fälle auch Trockenheit angekündigt.

(9)

- (a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Wettervorhersage für einen beliebigen Tag falsch ist?
- (b) Wenn die Vorhersage falsch ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit wird es dann regnen?

Aufgabe 5: Man gebe eine gebrochen lineare Abbildung

(5)

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

an, welche das Gebiet $G = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < |z + 2i|\}$ auf das Äußere des Kreises $\{w \in \mathbb{C} : |w| > 2\}$ abbildet.

Aufgabe 6: Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man:

(9)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(\sqrt{5} + \cos \varphi)^2} .$$
