Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung am 28.02.2006
(180 Minuten)
Höhere Mathematik III + IV, Numerische Mathematik

Aufgabe 1: (12 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x,y) = \log\left(y \sin^2(x)\right) - y \log\left(\sin^2(x)\right) - \sin^2(x) \log(y)\,, \quad (x,y) \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (0,\infty)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$F(x,y) = \frac{3}{2} \log(2)$$

in einer Umgebung des Punktes $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ nach y auflösbar ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der durch die Gleichung

$$F\Big(x, f(x)\Big) = \frac{3}{2} \log(2)$$

implizit gegebenen Funktion f im Punkt $x = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ das Gebiet

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 2 - x^2 - y^2\right\}$$

und f die Funktion

$$f(x,y,z) = (xz\,,\ xyz\,,\ z)\,.$$

Berechnen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_G \operatorname{div} f \; dx\,dy\,dz\,.$$

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{-\frac{1}{2}} + b & \text{für } t \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a,\, b \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme alle $a,\, b \in \mathbb{R}$, für die f Dichte einer Zufallsvariablen X ist.

(b) Für $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ ist f Dichte einer Zufallsvariablen X. Berechnen Sie $E(X)$ und $P\left(X < \frac{3}{4}\right)$.

(c) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $P(X < x_0) = \frac{1}{10}$.

---

bitte wenden!!

Aufgabe 4: **(12 Punkte)**

Gegeben sind die Punkte

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = i$$
$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 2$$

in $\mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie die Möbiustransformation f, die die Bedingung

$$f(z_i) = w_i, \quad i = 1, 2, 3$$

erfüllt.

(b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f von $B_2(-1+2i)$.

(c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α der Kreise $\partial B_1(0)$ und $\partial B_2(-1+2i)$ im Punkt -1.

Aufgabe 5: **(12 Punkte)**

Es sei

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-i)^3}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, i\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Laurentreihe von f um $z_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie

$$\oint_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} f(z)\, dz.$$

Aufgabe 6: **(12 Punkte)**

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$, $g\colon G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit

$$\forall\, z \in G\colon\ f(z) \cdot g(z) = 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$(\forall\, z \in G\colon\ f(z) = 0) \vee (\forall\, z \in G\colon\ g(z) = 0).$$

Aufgabe 7: **(8 Punkte)**

Es sei

$$V(x,y,z) = (xy^2, xz, z)$$

ein Vektorfeld und

$$\mathcal{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - x^2 - y^2,\ z > 0\right\}$$

eine Fläche.

Berechnen Sie mit Hilfe des Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V \cdot n\, do.$$

Hierbei ist n die Normale an $\mathcal{F}$ mit positiver z–Komponente.

Aufgabe N1
Einem technischen Vorgang liegt die theoretisch begründete Modellfunktion

$$f(x) = \alpha(-1122x^2 + 1275x - 153) + \beta(130x^2 - 195x + 5)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ zugrunde. Ihnen stehen die Meßwerte

i	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
f_i	-15	10	61

zur Verfügung. Bestimmen Sie die Parameter α und β im Sinne kleinster Fehlerquadrate optimal.

a) Formulieren Sie das zugehörige Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen, ohne die Normalgleichungen aufzustellen. Wie groß ist das Residuum?

c) Welche Voraussetzung muß erfüllt sein, damit eine eindeutige Lösung des allgemeinen linearen Ausgleichsproblems garantiert ist?

2+3+1=6 Punkte

Aufgabe N2
Zu bestimmen ist der Fixpunkt der Funktion

$$\Phi(x) = \frac{e^x(2-x)}{4(x+2)}$$

im Intervall $[0, 1]$.

a) Zeigen Sie, daß die Iterationsfunktion Φ im Intervall $[0, 1]$ die Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes erfüllt.

b) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ drei Fixpunktiterationen in Taschenrechnergenauigkeit durch.

c) Geben Sie mit Hilfe der a-priori- und der a-posteriori-Abschätzung und Ihrer Lipschitzkonstante aus Teilaufgabe a) obere Schranken für den Fehler von x_3 an, wenn Sie als Startwert der Iteration $x_0 = 1$ wählen.

d) Welche Konvergenzordnung liefert das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle unter geeigneten Voraussetzungen in der Nähe der Lösung? Geben Sie die Definition der entsprechenden Konvergenzordnung an.

3+1+2+2=8 Punkte

Aufgabe N3

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 54 & 30 \\ 4 & 11 & 21 \\ -12 & 33 & -21 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} 102 \\ 69 \\ 51 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung, nachdem Sie die Matrix A äquilibriert haben. Geben Sie die Diagonalmatrix D sowie die Matrizen P, L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der LR-Zerlegung.

d) Die Komplexität der LR-Zerlegung einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$, die der QR-Zerlegung der gleichen Matrix circa $\frac{4}{3}n^3$. Welche Vorteile bietet die Lösung eines linearen Gleichungssystems über die QR-Zerlegung, die den Mehraufwand rechtfertigen? Begründen Sie Ihre Antwort!

3+1+2+1=7 Punkte

Aufgabe N4

Von einer dreimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien folgende Funktionswerte bekannt:

i	0	1	2
x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	-4	$\frac{1}{3}$	2

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in Newton-Darstellung.

b) Sie möchten ein Interpolationspolynom in Newton-Darstellung möglichst effizient an mehreren Stellen auswerten. Wie gehen Sie vor? Geben Sie den Algorithmus explizit an!

c) Welche Voraussetzung muß die Funktion f erfüllen, damit Sie sicherstellen können, daß der Interpolationsfehler

$$\max_{x\in[-1,2]} |f(x) - P(f|x_1, x_2, x_3)(x)|$$

kleiner als $\frac{1}{3}$ ausfällt?

Hinweis: Für das Polynom $\omega(x) := (x+1)(x-0)(x-2)$ nimmt die Funktion $|\omega(x)|$ im Intervall $[-1, 2]$ ihr Maximum an der Stelle $x_{max} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$ an.

2+3+2=7 Punkte

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik
Prof. Dr. J. Bemelmans

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung am 28.02.2006
(120 Minuten)
Höhere Mathematik III + IV

Aufgabe 1: (12 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$F(x,y) = \log\left(y \sin^2(x)\right) - y \log\left(\sin^2(x)\right) - \sin^2(x) \log(y)\,, \quad (x,y) \in \left(0, \tfrac{\pi}{2}\right) \times (0,\infty)$$

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$F(x,y) = \frac{3}{2} \log(2)$$

in einer Umgebung des Punktes $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$ nach y auflösbar ist.

(b) Berechnen Sie die Ableitung der durch die Gleichung

$$F\Big(x, f(x)\Big) = \frac{3}{2} \log(2)$$

implizit gegebenen Funktion f im Punkt $x = \frac{\pi}{4}$.

Aufgabe 2: (12 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ das Gebiet

$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 2 - x^2 - y^2\right\}$$

und f die Funktion

$$f(x,y,z) = (xz\,,\ xyz\,,\ z)\,.$$

Berechnen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\int_G \operatorname{div} f \; dx\,dy\,dz\,.$$

Aufgabe 3: (12 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{-\frac{1}{2}} + b & \text{für } t \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a,\, b \in \mathbb{R}$.

(a) Man bestimme alle $a,\, b \in \mathbb{R}$, für die f Dichte einer Zufallsvariablen X ist.

(b) Für $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ ist f Dichte einer Zufallsvariablen X. Berechnen Sie $E(X)$ und $P\left(X < \frac{3}{4}\right)$.

(c) Bestimmen Sie $x_0 \in \mathbb{R}$, so dass $P(X < x_0) = \frac{1}{10}$.

---

b i t t e w e n d e n !!

Aufgabe 4: (12 Punkte)

Gegeben sind die Punkte

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1, \quad z_3 = i$$
$$w_1 = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 2$$

in $\mathbb{C}$.

(a) Bestimmen Sie die Möbiustransformation f, die die Bedingung

$$f(z_i) = w_i, \quad i = 1,2,3$$

erfüllt.

(b) Skizzieren Sie das Bild der Funktion f von $B_2(-1+2i)$.

(c) Bestimmen Sie den Schnittwinkel α der Kreise $\partial B_1(0)$ und $\partial B_2(-1+2i)$ im Punkt -1.

Aufgabe 5: (12 Punkte)

Es sei

$$f(z) = \frac{1}{z^3(z-i)^3}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0, i\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Koeffizienten der Laurentreihe von f um $z_0 = 0$.

(b) Berechnen Sie

$$\oint_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} f(z)\, dz.$$

Aufgabe 6: (12 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$, $g\colon G \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen mit

$$\forall\, z \in G\colon \; f(z) \cdot g(z) = 0.$$

Zeigen Sie, dass

$$(\forall\, z \in G\colon \; f(z) = 0) \vee (\forall\, z \in G\colon \; g(z) = 0).$$

Aufgabe 1

a) Es gilt

- $F\left(\frac{\pi}{4}, 2\right) = \frac{3}{2}\log 2$ (1)

- $\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4}, 2\right) = \frac{1}{y} - \log\left(\sin^2(x)\right) - \frac{\sin^2(x)}{y}\Big|_{\left(\frac{\pi}{4},2\right)} = \frac{1}{2} + \log(2) - \frac{1}{4} > 0$ (2) (2)

Nach dem Satz über implizite Funktionen folgt die Auflösbarkeit nach y um $\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$. (2)

b)
- $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{y\sin^2(x)} y \cdot 2\sin(x)\cos(x) - y\frac{1}{\sin^2(x)} 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)\cos(x)\log(y)$ (2)

- $\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}, 2\right) = 2 - 4 - \log(2) = -2 - \log(2)$ (1)

- $\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\pi}{4},2\right)}{\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\pi}{4},2\right)} = \underline{\underline{\frac{2+\log 2}{\frac{1}{4} + \log 2}}}$ (2)

Aufgabe 2

- $\partial G = \{(x,y,z) \mid z=0 \wedge 0<2-x^2-y^2\} \cup \{(x,y,z) \mid z>0 \wedge z=2-x^2-y^2\} := \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ (1)

- $\mathcal{F}_2$ parametrisieren:

$$\mathcal{F}_2: \quad \gamma(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r^2 \end{pmatrix}, \quad r,\varphi \in (0,\sqrt{2}) \times (0,2\pi)$$ (4)

- n und do von $\mathcal{F}_2$:

$$\gamma_r \times \gamma_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -2r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \Rightarrow n\,do = \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} d\varphi\, dr$$ (3)

- Integral berechnen:

$$\int_G \operatorname{div} f \, dx\,dy\,dz \overset{(1)}{=} \int_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2} f \cdot n\, do$$

$$\overset{(1)}{=} \int_{\mathcal{F}_2} f \cdot n\, do \qquad ; \text{ da } f(x,y,z) = 0 \text{ für } (x,y,z) \in \mathcal{F}_1$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} r\cos\varphi\,(2-r^2) \\ r\cos\varphi\,(2-r^2)\, r\sin\varphi \\ (2-r^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2r^2\cos\varphi \\ 2r^2\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} d\varphi\, dr$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} (2-r^2)\, 2r^3 \cos^2\varphi + (2-r^2)\, 2r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi + r(2-r^2)\, d\varphi\, dr$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} (2-r^2)\, 2r^3\, dr + 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} r(2-r^2)\, dr$$

$$= \underline{\underline{\frac{10}{3}\pi}}$$ (2)

Aufgabe 3:

a) $$f \geq 0 \;\wedge\; \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1 \;\Longleftrightarrow\; \forall t \in (0,1): a(1-t)^{-\frac{1}{2}} + b \geq 0 \;\wedge\; \int_0^1 a(1-t)^{-\frac{1}{2}} + b\,dt = 1$$

1 1

$$\Longleftrightarrow \quad \text{———} \;''\; \text{———} \quad \wedge \quad 2a + b = 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \forall t \in (0,1): a(1-t)^{-\frac{1}{2}} + 1 - 2a \geq 0 \quad \wedge \quad b = 1-2a$$

$$\Longleftrightarrow \Big((a \geq 0 \wedge a + 1 - 2a \geq 0) \vee (a < 0 \wedge F) \Big) \wedge b = 1-2a$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{0 \leq a \leq 1 \;\wedge\; b = 1-2a}}$$ 2 + 2

b) $\cdot$ $$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\,dt = \int_0^1 t \cdot \tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \Big[-t(1-t)^{\frac{1}{2}}\Big]_0^1 + \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{2}}\,dt = \underline{\underline{\tfrac{2}{3}}}$$ 2

$\cdot$ $$P\left(X < \tfrac{3}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{3}{4}} f(t)\,dt = \int_0^{3/4} \tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = -\left(1-\tfrac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + 1 = \underline{\underline{\tfrac{1}{2}}}$$ 2

c) $$P(X < x_0) = \tfrac{1}{10} \;\Longleftrightarrow\; \int_{-\infty}^{x_0} f(t)\,dt = \tfrac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \; 1 \geq x_0 \geq 0 \;\wedge\; \int_0^{x_0} \tfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt = \tfrac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \; 1 \geq x_0 \geq 0 \;\wedge\; 1 - (1-x_0)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{10}$$

$$\Longleftrightarrow \; 1 \geq x_0 \geq 0 \;\wedge\; x_0 = \tfrac{19}{100} \qquad \Longleftrightarrow \; \underline{\underline{x_0 = \tfrac{19}{100}}}$$ 2

Aufgabe 4

a) Mit der 6-Punkte-Formel erhält man:

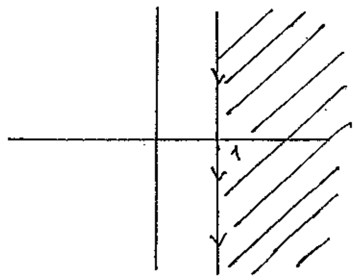
$$\frac{w-0}{w-2}\cdot\frac{1-2}{1-0} \overset{(2)}{=} \frac{z-1}{z-i}\cdot\frac{-1-i}{-1-1} \quad\Rightarrow\quad w = \frac{(2+2i)z-(2+2i)}{(3+i)z-(1+3i)} \qquad (4)$$

b) Da $-1+4i,\ -3+2i,\ -1 \in \partial B_2(-1+2i)$ (1) und

$$f(-1+4i) = 1+\tfrac{1}{2}i$$

$$f(-3+2i) = 1+\tfrac{1}{3}i \qquad (2)$$

$$f(-1) = 1$$



(1)

folgt, daß f $\partial B_2(-1+2i)$ auf die Gerade G_2 durch $1+\frac{1}{2}i,\ 1+\frac{1}{3}i,\ 1$ abbildet.

c) Sei G_1 die Gerade durch $0,1,2$. Nach Konstruktion ist $f(\partial B_1(0)) = G_1$.

Nach b) ist $f(\partial B_2(-1+2i)) = G_2$. In $f(-1)$ schneiden sich G_1 und G_2 mit einem Winkel von $90°$. Es folgt $\underline{\underline{\alpha = 90°}}$

(2)

Aufgabe 5:

a) $\cdot \ \frac{1}{z-i} = i \frac{1}{1+(iz)} = i \sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n$ (2)

$\cdot \ \frac{1}{(z-i)^2} = -\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{z-i}\right] = -i\sum_{n=1}^{\infty} n(-i)^n z^{n-1}$ (2)

$\cdot \ \frac{1}{(z-i)^3} = -\frac{1}{2}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z-i)^2}\right] = \frac{i}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-i)^n n(n-1) z^{n-2}$ (2)

$\cdot \ \frac{1}{z^3}\frac{1}{(z-i)^3} = \frac{i}{2}\sum_{n=2}^{\infty}(-i)^n n(n-1) z^{n-5} = \sum_{k=-3}^{\infty}\frac{i}{2}(-i)^{k+5}(k+5)(k+4) z^k$ (1)

· Koeffizienten der ~~Lauren~~ Laurentreihe:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{für } k<-3 \\ \frac{i}{2}(-i)^{k+5}(k+5)(k+4) & \text{für } k\geq -3 \end{cases}$$ (2)

b) $\int_{\partial B_{\frac{1}{2}}(0)} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname{Res}_{z=0} f\right) = 2\pi i\, c_{-1} = \underline{\underline{-12\pi}}$

(2) (1)

Aufgabe 6:

Ang. es gibt ein $z_0 \in G$ mit $f(z_0) \neq 0$. Da f stetig gibt es dann eine Umgebung $B_r(z_0)$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Es folgt ~~$g(z) \neq c$~~ $g(z) = 0$ für alle $z \in B_r(z_0)$. Nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen folgt $g(z) = 0$ für alle $z \in G$.

12

Musterlösung

HM34 WS 05/06

<u>Aufgabe 7:</u>

- $\partial \mathcal{F} = \{(x,y,z) \mid z=0 \ \wedge \ 0 = 2-x^2-y^2\}$ 1

- $\partial \mathcal{F}$ parametrisieren:

$$\partial \mathcal{F}: \ \gamma(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \\ \sqrt{2}\sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi) \qquad 3$$

- Integral berechnen:

$$\int_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} V \cdot n \, do \overset{1}{=} \int_{\partial \mathcal{F}} V \cdot d\underline{x}$$

$$\overset{1}{=} \int_0^{2\pi} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$$

; der Umlaufsinn von γ bildet eine Rechtsschraube mit n. 1

$$= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sqrt{2}\cos t \; 2\sin^2 t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -4\cos t \sin^3 t \, dt = \underline{\underline{0}} \qquad 1$$

Aufgabe N1 (Lineare Ausgleichsrechnung)
Einem technischen Vorgang liegt die theoretisch begründete Modellfunktion

$$f(x) = \alpha(-1122x^2 + 1275x - 153) + \beta(130x^2 - 195x + 5)$$

für $x \in \mathbb{R}$ und die Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in \mathbb{R}$ zugrunde. Ihnen stehen die Messwerte

i	1	2	3
x_i	0	$\frac{1}{2}$	1
f_i	-15	10	61

zur Verfügung. Bestimmen Sie die Parameter α und β im Sinne kleinster Fehlerquadrate optimal.

a) Formulieren Sie das zugehörige Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem mit Hilfe von Givens-Rotationen, ohne die Normalgleichungen aufzustellen. Wie groß ist das Residuum?

c) Welche Voraussetzung muß erfüllt sein, damit eine eindeutige Lösung des allgemeinen linearen Ausgleichsproblems garantiert ist?

2+3+1=6 Punkte

Lösung:

a) Das lineare Ausgleichsproblem lautet: Finde $x = (\alpha, \beta)^T \in \mathbb{R}^2$ so, dass $\|Ax - b\|_2$ minimal ist. Setze

$$f_1(x) := -1122x^2 + 1275x - 153 \quad \text{und} \quad f_2(x) := 130x^2 - 195x + 5,$$

dann ist

$$A = \begin{pmatrix} f_1(1) & f_2(1) \\ f_1(2) & f_2(2) \\ f_1(3) & f_2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -153 & 5 \\ 204 & -60 \\ 0 & -60 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \\ 61 \end{pmatrix}.$$

b) Löse das lineare Ausgleichsproblem mit Givens-Rotationen:
Eliminiere $A_{21} = 204$: $r_1 = \sqrt{(-153)^2 + 204^2} = 255$
$\Rightarrow c_1 = \frac{-153}{255} = -\frac{3}{5}$, $s_1 = \frac{204}{255} = \frac{4}{5}$,

$$G_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^{(1)} = G_1 A = \begin{pmatrix} 255 & -51 \\ 0 & 32 \\ 0 & -60 \end{pmatrix}, \quad b^{(1)} = G_1 b = \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ 61 \end{pmatrix}.$$

Eliminiere $A^{(1)}_{32} = -60$: $r_2 = \sqrt{32^2 + (-60)^2} = 68$
$\Rightarrow c_2 = \frac{32}{68} = \frac{8}{17}$, $s_2 = \frac{-60}{68} = -\frac{15}{17}$,

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{17} & -\frac{15}{17} \\ 0 & \frac{15}{17} & \frac{8}{17} \end{pmatrix}, \quad A^{(2)} = G_2 A^{(1)} = \begin{pmatrix} 255 & -51 \\ 0 & 68 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b^{(2)} = G_2 b^{(1)} = \begin{pmatrix} 17 \\ -51 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

Löse das lineare Ausgleichsproblem durch Rückwärtseinsetzen:

$$\beta = x_2 = \frac{-51}{68} = -\frac{3}{4}, \quad \alpha = x_1 = \frac{1}{255}\left(17 + \frac{3}{4}(-51)\right) = -\frac{1}{12}.$$

Damit lautet die Lösung $x = \left(-\frac{1}{12}, -\frac{3}{4}\right)^T$. Das Residuum lässt sich aus $b^{(2)}$ ablesen und beträgt $\|Ax - b\|_2 = 34$.

c) In der Vorlesung wurde gezeigt (Satz 4.2.6): Das lineare Ausgleichsproblem hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Matrix A vollen Rang besitzt.

Aufgabe N2 (Fixpunktiteration)
Zu bestimmen ist der Fixpunkt der Funktion

$$\Phi(x) = \frac{e^x(2-x)}{4(x+2)}$$

im Intervall $[0,1]$.

a) Zeigen Sie, daß die Iterationsfunktion Φ im Intervall $[0,1]$ die Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes erfüllt.

b) Führen Sie ausgehend von $x_0 = 1$ drei Fixpunktiterationen in Taschenrechnergenauigkeit durch.

c) Geben Sie mit Hilfe der a-priori- und der a-posteriori-Abschätzung und Ihrer Lipschitzkonstante aus Teilaufgabe a) obere Schranken für den Fehler von x_3 an, wenn Sie als Startwert der Iteration $x_0 = 1$ wählen.

d) Welche Konvergenzordnung liefert das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle unter geeigneten Voraussetzungen in der Nähe der Lösung? Geben Sie die Definition der entsprechenden Konvergenzordnung an.

3+1+2+2=8 Punkte

Lösung:

a) Zeige: Φ erfüllt im Intervall $I := [0,1]$ die Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes.

dazu: Prüfe Voraussetzungen des Banach-Fixpunktsatzes:

- $I = [0,1]$ ist abgeschlossen.
- Es ist $\Phi(0) = \frac{1}{4} \in I$, $\Phi(1) = \frac{e}{12} \approx 0.22652 \in I$ und $\Phi(x)$ ist monoton fallend auf I, denn es gilt

$$\Phi'(x) = -\frac{x^2e^x}{4(x+2)^2} \leq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

$\Rightarrow \Phi : I \to I$, also Φ ist Selbstabbildung auf I.

- Daher gilt

$$|\Phi'(x)| = \frac{x^2e^x}{4(x+2)^2} \leq \frac{e^x}{4}\underbrace{\frac{x^2}{(x+2)^2}}_{\leq\frac{1}{4}} \leq \frac{e}{16} \approx 0.16989 < 1.$$

$\Rightarrow \Phi : I \to I$ ist Kontraktion auf I.

Nach dem Banach-Fixpunktsatz gilt: Die Fixpunktiteration $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, $k \in \mathbb{N}_0$ konvergiert für jedes $x_0 \in I = [0,1]$ gegen den eindeutigen Fixpunkt $x^* \in I$ von Φ.

b) Man erhält ausgehend von $x_0 = 1$ als erste drei Iterierte

$$x_1 = 0.2265235, \quad x_2 = 0.2497561 \quad \text{und} \quad x_3 = 0.2496726.$$

c) Mit der Kontraktionskonstante $L = \frac{e}{16} \approx 0.16989$ aus Teilaufgabe a) und

$$|x_1 - x_0| \approx 0.77348$$

ergibt sich die a-priori-Abschätzung

$$|x_3 - x^*| \leq \frac{L^3}{1-L}|x_1 - x_0| \approx 0.0045692.$$

Verwendet man die a-posteriori-Abschätzung und

$$|x_3 - x_2| \approx 8.3506 \cdot 10^{-5},$$

so erhält man die wesentlich schärfere Abschätzung

$$|x_3 - x^*| \leq \frac{L}{1-L}|x_3 - x_2| \approx 1.7091 \cdot 10^{-5}.$$

d) Das Newton-Verfahren ist unter geeigneten Voraussetzungen in der Nähe der Nullstelle $x^* \in \mathbb{R}^n$ quadratisch konvergent. Das bedeutet, die Folge der Iterierten $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}^n$ genügt in einer Norm $\|\cdot\|$ folgender Bedingung: Es existiert eine Konstante $c > 0$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\|x_{k+1} - x^*\| \leq c\,\|x_k - x^*\|^2$$

für alle $k \geq k_0$ gilt.

Aufgabe N3 (LR-Zerlegung mit Äquilibrierung und Pivotisierung)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 24 & 54 & 30 \\ 4 & 11 & 21 \\ -12 & 33 & -21 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad \text{und der rechten Seite} \quad b = \begin{pmatrix} 102 \\ 69 \\ 51 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung, nachdem Sie die Matrix A äquilibriert haben. Geben Sie die Diagonalmatrix D sowie die Matrizen P, L und R explizit an.

b) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe der LR-Zerlegung.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der LR-Zerlegung.

d) Die Komplexität der LR-Zerlegung einer Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ beträgt etwa $\frac{1}{3}n^3$, die der QR-Zerlegung der gleichen Matrix circa $\frac{4}{3}n^3$. Welche Vorteile bietet die Lösung eines linearen Gleichungssystems über die QR-Zerlegung, die den Mehraufwand rechtfertigen? Begründen Sie Ihre Antwort!

3+1+2+1=7 Punkte

Lösung:

a) Man summiert die Beträge der Einträge der einzelnen Zeilen und träge den Kehrwert der Summe als Diagonaleintrag in die Zeilenskalierungsmatrix D ein. Man erhält so D und die skalierte Matrix DA

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{108} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{36} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{66} \end{pmatrix}, \quad DA = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{11}{36} & \frac{7}{12} \\ \frac{-2}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{22} \end{pmatrix}.$$

Führe nun die LR-Zerlegung mir Spaltenpivotisierung durch:

$$DA \xrightarrow{\text{kein Tausch}} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{9} & \frac{11}{36} & \frac{7}{12} \\ \frac{-2}{11} & \frac{1}{2} & -\frac{7}{22} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & \frac{4}{9} \\ \frac{-9}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{Tausch Z2 mit Z3}} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} \\ \frac{-9}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{18} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Elimination}} \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} \\ \frac{-9}{11} & \frac{10}{11} & -\frac{1}{11} \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{180} & \frac{9}{20} \end{pmatrix}.$$

Insgesamt erhält man so die Zerlegung $PDA = LR$ mit D wie oben und

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{11} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{11}{180} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & \frac{5}{18} \\ 0 & \frac{10}{11} & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{9}{20} \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $\det(P) = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} = -1$. Die Determinanten der Matrizen D, L und R ergeben sich jeweils als Produkt der Diagonaleinträge und daher gilt $\det(D) = \frac{1}{108}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{66} = \frac{1}{256608}$, $\det(L) = 1$ und $\det(R) = \frac{2}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{9}{20} = \frac{1}{11}$. Insgesamt erhält man

$$\det A = \frac{\det(L)\det(R)}{\det(P)\det(D)} = \frac{\frac{1}{11}}{-1\cdot\frac{1}{256608}} = -23328.$$

c) Skalierung der rechten Seite und Berücksichtigung des Zeilentauschs ergibt $Db = \left(\frac{17}{18}, \frac{23}{12}, \frac{17}{22}\right)^T$ und $PDb = \left(\frac{17}{18}, \frac{17}{22}, \frac{23}{12}\right)^T$.

Löse zunächst $Ly = PDb$ durch Vorwärtseinsetzen und es ergibt sich

$$y_1 = \frac{17}{18}, \quad y_2 = \frac{17}{22} + \frac{9}{11}\cdot\frac{17}{18} = \frac{17}{11}, \quad y_3 = \frac{23}{12} - \frac{1}{2}\cdot\frac{17}{18} - \frac{11}{180}\cdot\frac{17}{11} = \frac{27}{20}.$$

Schließlich löse $Rx = y$ durch Rückwärtseinsetzen und erhalte

$$x_3 = \frac{27}{20}\cdot\frac{20}{9} = 3, \quad x_2 = \left[\frac{17}{11} + \frac{1}{11}\cdot 3\right]\cdot\frac{11}{10} = 2,$$
$$x_1 = \left[\frac{17}{18} - \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{5}{18}\cdot 3\right]\cdot\frac{9}{2} = -4.$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems lautet $x = (-4, 2, 3)^T$.

d) Die QR-Zerlegung beruht auf orthogonalen Matrizen $Q_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (z.B. Givens-Rotationen), die sukzessive auf die zu zerlegende Matrix A angewandt werden. Aufgrund der Orthogonalität der Matrix Q_i und da A vollen Rang besitzt, gilt in jedem Schritt $\kappa_2(A) = \kappa_2(Q_iA)$, das heißt die Kondition der Matrix bleibt in jedem Eliminationsschritt konstant. Dies führt zu der sehr hohen Stabilität des Lösungsverfahrens mit Hilfe der QR-Zerlegung.

Bei der LR-Zerlegung ist nicht garantiert, daß die Kondition konstant bleibt. Steigt sie bei der Elimination stark an, so entstehen beim Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen des transformierten Systems große unvermeidbare Fehler.

Aufgabe N4 (Polynominterpolation)

Von einer dreimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien folgende Funktionswerte bekannt:

i	0	1	2
x_i	-1	0	2
$f(x_i)$	-4	$\frac{1}{3}$	2

a) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ in Newton-Darstellung.

b) Sie möchten ein Interpolationspolynom in Newton-Darstellung möglichst effizient an mehreren Stellen auswerten. Wie gehen Sie vor? Geben Sie den Algorithmus explizit an!

c) Welche Voraussetzung muß die Funktion f erfüllen, damit Sie sicherstellen können, daß der Interpolationsfehler

$$\max_{x\in[-1,2]} |f(x) - P(f|x_0, x_1, x_2)(x)|$$

kleiner als $\frac{1}{3}$ ausfällt?

Hinweis: Für das Polynom $\omega(x) := (x+1)(x-0)(x-2)$ nimmt die Funktion $|\omega(x)|$ im Intervall $[-1, 2]$ ihr Maximum an der Stelle $x_{max} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{7}$ an.

2+3+2=7 Punkte

Lösung:

a) Führe die Newton-Interpolation mit Hilfe der dividierten Differenzen durch:

i	x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i-1}]f$	$[x_i, x_{i-1}, x_{i-2}]f$
0	-1	$f(-1) = -4$		
1	0	$f(0) = \frac{1}{3}$	$\frac{13}{3}$	
2	2	$f(2) = 2$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{7}{6}$

$$\overset{\text{Newton-Interpolation}}{\Rightarrow} \quad P(f|x_0, x_1, x_2)(x) = -4 + \frac{13}{3}(x+1) - \frac{7}{6}(x+1)x.$$

b) Zur effizienten Auswertung eines Interpolationspolynoms n-ten Grades $P_n(x)$ in Newton-Darstellung

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})$$

wendet man ein Horner-artiges Schema an. Im Fall $n = 3$ lautet dieses

$$\begin{aligned} P_3(x) &= c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) \\ &= c_0 + (x-x_0)\left[c_1 + (x-x_1)\left[c_2 + c_3(x-x_2)\right]\right]. \end{aligned}$$

Der zugehörige Auswertungsalgorithmus lautet im Pseudocode

function EvaluateNewtonPolynomial($c_0, \dots, c_n, x_0, \dots, x_{n-1}, x$)
  $p \leftarrow c_n$
  for $i \leftarrow n-1, n-2, \dots, 0$ **do**
    $p \leftarrow c_i + (x - x_i) \cdot p$
  end for
  return p
end function.

c) Betrachte zunächst das Knotenpolynom $\omega(x) := (x+1)(x-0)(x-2)$ im Intervall $I := [-1, 2]$. An den Rändern des Intervalls verschwindet das Knotenpolynom. Dem Hinweis zufolge ist

$$\max_{x\in I} |\omega(x)| = |\omega(x_{max})| = -\frac{1}{27}(4+\sqrt{7})(1+\sqrt{7})(-5+\sqrt{7}) \approx 2.1126.$$

Es soll sichergestellt sein, daß der Interpolationsfehler kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Für ihn gilt die Abschätzung

$$\max_{x\in[x_0,x_2]} |P(f|x_0, x_1, x_2)(x) - f(x)| \le \max_{x\in[x_0,x_2]} |\omega(x)| \max_{x\in[x_0,x_2]} \frac{|f'''(x)|}{3!}.$$

Setze daher

$$\max_{x\in[x_0,x_2]} |\omega(x)| \max_{x\in[x_0,x_2]} \frac{|f'''(x)|}{3!} \overset{!}{<} \frac{1}{3} \Leftrightarrow \max_{x\in[x_0,x_2]} |f'''(x)| < \frac{1}{3}\frac{3!}{|\omega(x_{max})|} \approx 0.94669,$$

wobei das Ergebnis zur Sicherheit der Abschätzung abgerundet wurde.

Um einen Interpolationsfehler kleiner als $\frac{1}{3}$ zu garantieren, ist vorauszusetzen, daß das Maximum des Betrags der dritten Ableitung der Funktion f kleiner als 0.94669 ausfällt.