Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Telefon: ++49(0)241-8094925
Fax: ++49(0)241-8092323
Sekr.: ++49(0)241-8094922
8094921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Winter 2008
(120 Minuten)
Höhere Mathematik III + IV
25.02.2008

Aufgabe 1 A **[12 Punkte]**

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $x_0 > 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\log(n)\big)^k}{n^x} \qquad \text{für } x \in [x_0, \infty)$$

gleichmäßig konvergiert. (6 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

eine auf $(1, \infty)$ unendlich oft differenzierbare Funktion gegeben ist und geben Sie die k–te Ableitung von f an. (6 Punkte)

Aufgabe 2 B **[12 Punkte]**

Sei $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche $\mathcal{F}$, welche entsteht, wenn Sie die

Sphäre $S_a := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$ mit dem

Zylinder $Z_b := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le b^2\}$ schneiden .

Aufgabe 3 C **[12 Punkte]**

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} a(1-t)^{-1/2} + b & , \quad t \in (0,1) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ für welche f die Dichte einer Zufallsvariablen ist. (6 Punkte)

(b) Berechnen Sie für $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ und mit obigem f als Dichte einer Zufallsvariablen X deren Verteilungsfunktion, den Erwartungswert von X, sowie $P\big(\{X > \frac{3}{4}\}\big)$. (6 Punkte)

Bitte wenden!!

Aufgabe 4 D **[6 Punkte]**

Berechnen Sie für $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ die Integrale

$$\oint_\Gamma \frac{\sin(3z)}{z + \frac{\pi}{4}}\, dz \ , \qquad \text{(3 Punkte)}$$

$$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^3}\, dz \ . \qquad \text{(3 Punkte)}$$

Aufgabe 5 E **[6 Punkte]**

Welche der folgenden Funktionen besitzen eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$? Begründen Sie ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den Typ der Singularität und das Residuum in $z_0 = 0$.

$$\frac{1}{z(z-1)} \quad , \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right) \qquad \text{(je 3 Punkte)}$$

Aufgabe 6 F **[15 Punkte]**

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\, dx \ .$$

Aufgabe 7 G **[9 Punkte]**

Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = e^x \ , & x > 0 \\ y(0) = 0 & \\ y'(0) = 0 & \end{cases}$$

Benutzen Sie dazu die Laplace–Transformation und die Formel

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-a)^n}\right\}(t) = e^{at}\, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad , \qquad (n \in \mathbb{N}\, ,\, a \in \mathbb{R})$$

Prof. Dr. Stanislaus Maier-Paape

Institut für Mathematik, RWTH Aachen

http://www.instmath.rwth-aachen.de/~maier
maier@instmath.rwth-aachen.de

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

RWTH

Telefon: ++49(0)241-80 94925
Fax: ++49(0)241-80 92323
Sekr.: ++49(0)241-80 94922
80 94921
Hausadr.: Templergraben 55
1. Etage, Raum 109
Postadr.: D-52062 Aachen
Germany

Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Winter 2008
(180 Minuten)

Höhere Mathematik III + IV , Numerik ; HöMa Teil

25.02.2008

Aufgabe 1 **[12 Punkte]**

Seien $k \in \mathbb{N}$ und $x_0 > 1$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\big(\log(n)\big)^k}{n^x} \qquad \text{für } x \in [x_0, \infty)$$

gleichmäßig konvergiert. (6 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

eine auf $(1, \infty)$ unendlich oft differenzierbare Funktion gegeben ist und geben Sie die k–te Ableitung von f an. (6 Punkte)

Aufgabe 2 **[12 Punkte]**

Sei $a > b > 0$. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche $\mathcal{F}$, welche entsteht, wenn Sie die

Sphäre $S_a := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 + z^2 = a^2\big\}$ mit dem

Zylinder $Z_b := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; x^2 + y^2 \leq b^2\big\}$ schneiden .

Aufgabe 3 **[9 Punkte]**

Es seien $V\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ das Vektorfeld $V(x, y, z) := (xy^2\,, xz\,, z)$ und

$$\mathcal{F} := \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\big|\; z = 2 - x^2 - y^2 ,\;\; z > 0\big\}$$

eine Fläche.

Berechnen Sie mit dem Stokesschen Integralsatz

$$\int_{\mathcal{F}} < \operatorname{rot} V\,, n > \, do\,.$$

Hierbei sei n diejenige Einheitsnormale an $\mathcal{F}$, welche eine positive z–Komponente hat.

Bitte wenden!!

Aufgabe 4 (C) [12 Punkte]

Gegeben sei die Funktion

$$f(t) := \begin{cases} a(1-t)^{-1/2} + b & , \quad t \in (0,1) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

mit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$ für welche f die Dichte einer Zufallsvariablen ist. (6 Punkte)

(b) Berechnen Sie für $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ und mit obigem f als Dichte einer Zufallsvariablen X deren Verteilungsfunktion, den Erwartungswert von X, sowie $P\left(\left\{X > \frac{3}{4}\right\}\right)$. (6 Punkte)

Aufgabe 5 (D) [8 Punkte]

Berechnen Sie für $\Gamma := \left\{z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = 1\right\}$ die Integrale

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z-2}\,dz\,,$$ (2 Punkte)

$$\oint_\Gamma \frac{\sin(3z)}{z+\frac{\pi}{4}}\,dz\,,$$ (3 Punkte)

$$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^3}\,dz\,.$$ (3 Punkte)

Aufgabe 6 (E) [12 Punkte]

Welche der folgenden Funktionen besitzen eine isolierte Singularität in $z_0 = 0$? Begründen Sie ihre Antwort und bestimmen Sie gegebenenfalls den Typ der Singularität und das Residuum in $z_0 = 0$.

$$\frac{\sin(z)}{z}\,, \quad \frac{1}{z^2}\,, \quad \frac{1}{z(z-1)}\,, \quad \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$ (je 3 Punkte)

Aufgabe 7 (F) [15 Punkte]

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)}\,dx\,.$$

Aufgabe N1
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie null Punkte. Insgesamt erhalten Sie aber mindestens null Punkte für diese Aufgabe.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Bei der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ der symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die Diagonaleinträge der Matrix D die Eigenwerte der Matrix A.

b) Das Verfahren der QR-Zerlegung einer quadratischen regulären Matrix A hat den Vorteil, dass in jedem Schritt die Kondition bezüglich $\|\cdot\|_2$ des transformierten Problems mit der des ursprünglichen Problems übereinstimmt.

c) Es existiert ein stabiler Algorithmus zur Auswertung der Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $f(x)$ gut konditioniert.

d) Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x_* so, dass $F(x_*) = x_*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 2.

e) Es sei $q(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0))$, $\ldots$, $(x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, wobei $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ sei. Dann gilt für den Interpolationsfehler in einem Intervall $[a, b]$ mit $x_0 < a < b < x_n$:

$$|q(x) - f(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} \left(\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \right) \cdot \max_{\xi\in[x_0,x_n]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| .$$

5 Punkte

Aufgabe N2

a) Die Funktion

$$f(x) = (1+x)^3$$

soll für $x = -\sqrt{5}$ ausgewertet werden.

i) Bestimmen Sie die obere Schranke der Kondition κ_{rel} des Problems für $x \in [-3, -2]$. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

ii) Sei $\tilde{x} \in [-3, -2]$ ein Näherungswert für $x = -\sqrt{5}$. Wie groß dürfte die relative Abweichung in x maximal sein, damit der relative Fehler in $f(\tilde{x})$ maximal 3 % beträgt?

b) Gegeben seien die folgenden Funktionswerte einer Funktion $f(x)$

i	0	1	2	3
x_i	-1	0	1	2
$f(x_i)$	4	1	2	1

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ in der Newton-Form.

4+4=8 Punkte

Aufgabe N3

a) Gegeben sind die Punkte

i	1	2	3	4
x_i	-3	-1	1	2
y_i	21	83	-49	-18

die gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = \alpha(x^2 - x + 1) + \beta \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1$$

liegen. Stellen Sie die Matrix A und die rechte Seite b des linearen Ausgleichsproblems zur Berechnung von $(\alpha, \beta)^T$ auf.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Givens-Rotationen, ohne die Normalgleichungen aufzustellen. Wie groß ist das Residuum?

2+5=7 Punkte

Aufgabe N4

Bestimmen Sie eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\left\{\begin{array}{rcl} -6x^2 - 3y^2 + 18e^z - 3 & = & 0 \\ -6x + 3y^7 + e^{-3z} - 7 & = & 0 \\ 6x^3 - y^3 + 37z + 26 & = & 0 \end{array}\right.$$

mit dem Newton-Verfahren, indem Sie vom Startwert $(-1, 1, 0)^T$ ausgehen und einen Iterationsschritt durchführen.

8 Punkte

A

a) Es gilt $x^{\frac{1}{n}} > \log(x) \quad \forall x > (4n^2)^n \; \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N(\varepsilon) \quad \log(n) \leq n^{\varepsilon} \quad \forall n > N(\varepsilon)$$ 3

$$\Rightarrow (\log(n))^{\ell} \leq n^{\ell\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0 \; \forall n > N(\varepsilon) \; \forall \ell \in \mathbb{N}$$

Sei $x_0 > 1$, dann ist $x \in [x_0, \infty)$ von der Form $x = 1+h$ mit einem $h > 0$.

Zu festem $\ell \in \mathbb{N}$ wähle $\varepsilon := \frac{h}{2\ell}$

Dann gilt 2
$$\frac{(\log(n))^{\ell}}{n^x} = \frac{(\log(n))^{\ell}}{n^{1+h}} \leq \frac{1}{n^{1+\frac{h}{2}}} \quad \forall n > N(\varepsilon)$$

Daher ist
$$\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{(\log(n))^{\ell}}{n^x} \leq \sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{h}{2}}} < \infty$$

Mit dem Weierstraßkriterium folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(n))^{\ell}}{n^x} \quad \forall x \in [x_0, \infty), \; \ell \in \mathbb{N}$ 1

b) Es gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{h}{2}}} < \infty \quad \forall x \in [x_0, \infty)$$ 3

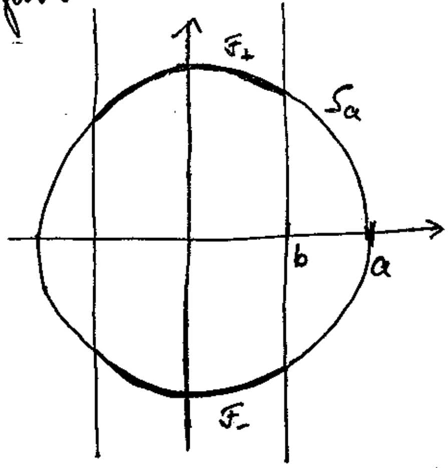
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ konvergiert somit gleichmäßig und somit punktweise 1
$\forall x \in [x_0, \infty)$. Ferner gilt $\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} \frac{1}{n^x} = \frac{(\log(n))^{\ell}}{n^x}, \; \ell \in \mathbb{N}$.

Mit Aufgabenteil a) und dem Satz aus der Vorlesung gilt dann
$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} f(x) \underset{a)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} \frac{1}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log(n))^{\ell}}{n^x}, \; \ell \in \mathbb{N}$$

Somit ist f unendlich oft differenzierbar in $[x_0, \infty)$. 2

2. Aufgabe

B



Es sei $\mathcal{F}^+ = \{(x,y,z) \in \mathcal{F};\ z > 0\}$,

dann gilt für den gesuchten Flächeninhalt

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}) = 2\,\mathcal{A}(\mathcal{F}^+).$$ 1

$\mathcal{F}^+$ kann als Graph einer reellen Funktion dargestellt werden:

$$\mathcal{F}^+ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z = \sqrt{a^2-(x^2+y^2)},\ \cancel{(x,y) \in B_b}\ x^2+y^2 \leq b\}$$ 2

Dann gilt für den Flächeninhalt

$$\mathcal{A}(\mathcal{F}^+) = \int_{B_b(0)} \sqrt{1 + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right|^2 + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right|^2}\, d(x,y)$$ 1

mit $f(x,y) = \sqrt{a^2-(x^2+y^2)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-x}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{-y}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F}^+) = \int_{B_b(0)} \sqrt{1 + \frac{x^2+y^2}{a^2-(x^2+y^2)}}\, d(x,y)$$ 2

$$= \int_{B_b(0)} \frac{a}{\sqrt{a^2-(x^2+y^2)}}\, d(x,y)$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^b \frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\, r\, dr\, d\varphi$$ 3

$s = a^2 - r^2$

$ds = -2r\, dr$

$$= -\pi a \int_{a^2}^{a^2-b^2} \frac{1}{\sqrt{s}} \, ds$$

$$= -2\pi a \sqrt{s} \Big|_{a^2}^{a^2-b^2}$$

$$= 2\pi a \left(\sqrt{a^2} - \sqrt{a^2-b^2} \right)$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{F}) = 4\pi a \left(a - \sqrt{a^2-b^2} \right)$$

3

Aufgabe 4 $a, b \in \mathbb{R}$ $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{-1/2} + b & \text{für } t \in (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

C

a) f ist genau dann eine Dichte, wenn gilt

$$f(t) \geq 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = 1$$

2

$$\Updownarrow$$

$$a(1-t)^{-\frac{1}{2}} + b \geq 0 \ \forall t \in (0,1) \quad \wedge \quad a \cdot \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}}\,dt + b = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$a \geq \sqrt{1-t}\,(-b) \ \forall t \in (0,1) \quad \wedge \quad 2a + b = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$a \geq \sqrt{1-t}\,(2a-1) \ \forall t \in (0,1) \quad \wedge \quad 2a+b = 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left([(2a-1) \geq 0 \wedge a \geq 2a-1] \vee [(2a-1) < 0 \wedge a \geq 0] \right) \wedge 2a+b=1$$

$$\Updownarrow$$

$$\left(1 \geq a \geq \tfrac{1}{2} \vee 0 \leq a < \tfrac{1}{2} \right) \wedge 2a+b=1$$

$$\Updownarrow$$

2 2

$$\underline{\underline{0 \leq a \leq 1 \quad \wedge \quad 2a+b=1}}$$

b)

- $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ \int_0^x f(t)\,dt & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} = \underline{\underline{\begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - \sqrt{1-x} & \text{für } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}}}$ 2

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f(t)\,dt = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$ 2

- $P(\{X > \frac{3}{4}\}) = 1 - P(\{X \leq \frac{3}{4}\}) = 1 - F_X(\frac{3}{4}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$ 2

D

$$\oint_\Gamma \frac{e^z}{z-2}\,dz = 0 \quad , \text{ da } \frac{e^z}{z-2} \text{ holomorph } \text{①}$$

für $|z| \leq 1$ und Cauchy Integralsatz. ①

$$\oint_\Gamma \frac{\sin(3z)}{z+\frac{\pi}{4}}\,dz \underset{\left(\left|\frac{\pi}{4}\right| < 1\right)}{\overset{\text{Cauchy Integralformel ①}}{=}} 2\pi i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -2\pi i \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}\pi i \quad \text{②}$$

$$\oint_\Gamma \frac{e^{2z}}{z^3}\,dz \underset{|0| < 1}{\overset{\text{Cauchy Integralformel ①}}{=}} \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 e^{2z}\Big|_{z=0}$$

$$= \pi i \, 4 e^0 = 4\pi i \quad \text{②}$$

Aufgabe E

i) $f(z) := \frac{\sin(z)}{z}$

$z \longmapsto \sin(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$

$z \longmapsto \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

Weiter gilt: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

$\Rightarrow z_0 = 0$ ist hebbare Singularität von f

$\Rightarrow \operatorname{Res}(f, 0) = 0$

ii) $g(z) := \frac{1}{z^2}$

Es gilt: $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph

$\Rightarrow z_0 = 0$ ist isolierte Singularität von g

Weiter gilt: $\frac{1}{g(z)} = z^2$ hat eine doppelte Nullstelle in 0

$\Rightarrow z_0 = 0$ ist Pol 2. Ordnung von g

$\operatorname{Res}(g, 0) = 0$, da $c_{-2} = 1$ der einzige von 0 verschiedene Koeffizient der Laurent-Entwicklung von g ist.

iii) $h(z) := \frac{1}{z(z-1)}$

Es gilt $h: B_{1/2}(0) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph

$\Rightarrow$ $z_0 = 0$ ist isolierte Singularität von h

Weiter gilt: $\frac{1}{h(z)} = z \cdot (z-1)$ hat eine einfache Nullstelle in $z_0 = 0$.

$\Rightarrow$ z_0 ist Pol erster Ordnung von h

$\mathrm{Res}(h, 0) = \lim_{z \to 0} [f(z) \cdot z) = -1$

iv) $W(z) := \sin\left(\frac{1}{z}\right)$

$z \mapsto \sin(z)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}$

$z \mapsto \frac{1}{z}$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow$ $W: \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ ist holomorph

$\Rightarrow$ $z_0 = 0$ ist isolierte Singularität von W

Es gilt $W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} z^{-(2n+1)}$

$\Rightarrow$ unendlich viele Koeffizienten des Hauptteils der Laurententwicklung von W sind von Null verschieden

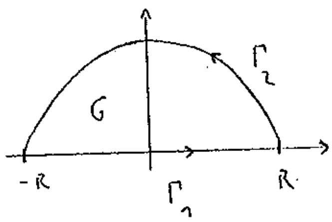
$\Rightarrow$ z_0 ist wesentliche Singularität von W

$\mathrm{Res}(W, 0) = (-1)^0 = 1$

Aufgabe 7 F

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} \, dx =: \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx$$

- Kurve für Integrationsweg



$\Gamma_1 \cup \Gamma_2 =: \Gamma$

$\Gamma_1 : \gamma_1(t) = t \, , \quad t \in [-R, R]$ (3)

$\Gamma_2 : \gamma_2(t) = R e^{it} \, , \quad t \in [0, \pi]$

- Residuensatz

$$\oint_\Gamma f(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i)$$ (1)

wobei z_i isolierte Singularität von f in G

- Singularitäten von f

$z^2 + 1 = 0$ $\qquad$ $z^2 + 2z + 2 = 0$

$z = \pm\sqrt{-1} = \pm i$ $\qquad$ $z = -1 \pm \sqrt{1-2}$

$= -1 \pm i$

wenn R groß genug gewählt wird, (2)
liegen die isol. Sing. $z_1 = +i$ und
$z_2 = i - 1$ in G

- Residuen

$\operatorname{Res}(f, z_i) = \lim\limits_{z \to z_i} \left(f(z)(z - z_i) \right)$ für Pole 1. O.

$$\operatorname{Res}(f, i) = \lim_{z \to i} \left(\frac{z^2}{(z+i)(z^2+2z+2)} \right) = \frac{i^2}{2i(1+2i)} = \underline{\underline{\frac{1}{4-2i}}}$$ (2)

$$\operatorname{Res}(f, i-1) = \lim_{z \to i-1} \left(\frac{z^2}{(z^2+1)(z+1+i)} \right) = \frac{(i-1)^2}{((i-1)^2+1)(i-1+1+i)}$$ (2)

$$= \frac{-2i}{2i(1-2i)} = \underline{\underline{\frac{1}{2i-1}}}$$

- somit: $\displaystyle\oint_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{4-2i}+\frac{1}{2i-1}\right)$

$$= 2\pi i\cdot\frac{2i-1+4-2i}{(4-2i)(2i-1)} = 2\pi i\cdot\frac{3}{10i} = \underline{\underline{\frac{3}{5}\pi}}\ (\in\mathbb{R}) \qquad 2$$

- $\displaystyle\oint_\Gamma f = \int_{\Gamma_1} f + \int_{\Gamma_2} f$

$$\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz = \int_0^\pi f(Re^{it})\cdot iRe^{it}\,dt$$

$$\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right| = \left|\int_0^\pi \frac{(Re^{it})^2}{\left((Re^{it})^2+1\right)\left((Re^{it})^2+2Re^{it}+2\right)}\,iRe^{it}\,dt\right|$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R^3}{|R^2e^{2it}+1|\cdot|R^2e^{2it}+2Re^{it}+2|}\,dt$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{R^3}{(R^2-1)(R^2-2R-2)}\,dt$$

R groß

$$\leq \int_0^\pi \frac{R^3}{(R^2-\frac{1}{2}R^2)(R^2-\frac{1}{2}R^2)}\,dt$$

$$= \frac{1}{R}\cdot\text{const} \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty) \qquad 2$$

$$\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz = \int_{-R}^{R} f(t)\,dt \longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \quad (R\to\infty) \qquad 1$$

folglich: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\oint_\Gamma f(z)\,dz = \frac{3}{5}\pi$

Aufgabe 7 G

Anwendung der Laplace-Transformation auf die Differentialgleichung liefert:

$$\mathcal{L}(y'' + 2y' - 3y)(x) = (x^2 + 2x - 3)\,\mathcal{L}(y)(x)$$

$$= (x-1)(x+3)\,\mathcal{L}(y)(x) \quad 2$$

$$\mathcal{L}(e^x) = \frac{1}{x-1} \quad 1$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(y)(x) = \frac{1}{(x-1)^2(x+3)}$$

Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{-\frac{1}{16}}{x-1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2} + \frac{1/16}{x+3} \quad 3$$

Anwendung der inversen Laplace-Transformation liefert:

$$y(x) = -\frac{1}{16}e^x + \frac{1}{4}x e^x + \frac{1}{16}e^{-3x} \quad 3$$

Aufgabe 3 $\quad V(x,y,z) = (xy^2, xz, z)$

4

$\mathcal{F} = \{(x,y,z) \mid z = 2 - x^2 - y^2 \wedge z > 0\}$

- $\partial\mathcal{F} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 = 2 \wedge z = 0\}$ 2
- $\partial\mathcal{F}$ parametrisieren: $\gamma(t) = \sqrt{2}\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 0\end{pmatrix}, \; t \in [0, 2\pi)$ 2
- $\int_{\mathcal{F}} \langle \operatorname{rot} V, n\rangle \, do \overset{\text{Satz von Stokes}}{=} \int_{\partial\mathcal{F}} V \cdot dx$ 1

$= \int_0^{2\pi} V(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt$ 1

$= \int_0^{2\pi} -4 \cos t \sin^3 t \, dt = 0$ 3

Aufgabe 10
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt. Für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Wird keine Antwort gegeben, erhalten Sie Null Punkte. Insgesamt erhalten Sie aber mindestens Null Punkte für diese Aufgabe.

Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

a) Bei der Cholesky-Zerlegung $A = LDL^T$ der symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind die Diagonaleinträge der Matrix D die Eigenwerte der Matrix A.

b) Das Verfahren der QR-Zerlegung einer quadratischen regulären Matrix A hat den Vorteil, dass in jedem Schritt die Kondition bezüglich $\|\cdot\|_2$ des transformierten Problems mit der des ursprünglichen Problems übereinstimmt.

c) Es existiert ein stabiler Algorithmus zur Auswertung der Funktion $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $f(x)$ gut konditioniert.

d) Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und x_* so, dass $F(x_*) = x_*$ gilt. Für $x_0 \in \mathbb{R}$ wird die Fixpunktiteration $x_{k+1} = F(x_k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ definiert. Die Konvergenzordnung der Fixpunktiteration ist immer 2.

e) Es sei $q(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)$ das Interpolationspolynom zu den Daten $(x_0, f(x_0))$, $\ldots$, $(x_n, f(x_n))$ mit $x_0 < \ldots < x_n$, wobei $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ sei. Dann gilt für den Interpolationsfehler in einem Intervall $[a, b]$ mit $x_0 < a < b < x_n$:

$$|q(x) - f(x)| \leq \max_{x\in[a,b]} \left(\prod_{i=0}^{n} |x - x_i| \right) \cdot \max_{\xi\in[x_0,x_n]} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \right| .$$

5 Punkte

Lösung:

a) Die Aussage ist falsch.

b) Die Aussage ist richtig.

c) Die Aussage ist falsch.

d) Die Aussage ist falsch.

e) Die Aussage ist richtig.

Aufgabe 11

a) Die Funktion
$$f(x) = (1+x)^3$$
soll für $x = -\sqrt{5}$ ausgewertet werden.

i) Bestimmen Sie die obere Schranke der Kondition κ_{rel} des Problems für $x \in [-3,-2]$. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

ii) Sei $\tilde{x} \in [-3,-2]$ ein Näherungswert für $x = -\sqrt{5}$. Wie groß dürfte die relative Abweichung in x maximal sein, damit der relative Fehler in $f(\tilde{x})$ maximal 3 % beträgt?

b) Gegeben seien die folgenden Funktionswerte einer Funktion $f(x)$

i	0	1	2	3
x_i	−1	0	1	2
$f(x_i)$	4	1	2	1

Bestimmen Sie das Interpolationspolynom $p(x)$ in der Newton-Form.

4+4=8 Punkte

Lösung:

a) i) Für die relative Konditionszahl $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion $f(x)$ gilt
$$\kappa_{rel}(x) = \left| f'(x)\frac{x}{f(x)} \right|.$$

Wir haben
$$f(x) = (1+x)^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3(1+x)^2,$$
und
$$-3 \le x \le -2 < -1 \quad \Rightarrow \quad 1+x < 0.$$
Daraus folgt $\boxed{1}$
$$\kappa_{rel}(x) = \left| 3(1+x)^2 \frac{x}{(1+x)^3} \right| = \left| \frac{3x}{1+x} \right| = \frac{3x}{1+x}$$

Um das Maximum von $\kappa_{rel}(x)$ auf $[-3,-2]$ zu finden, leiten wir die Funktion ab
$$\kappa'_{rel}(x) = \frac{3\cdot(1+x) - 3x\cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{3}{(1+x)^2} > 0.$$
Damit ist die Funktion $\kappa_{rel}(x)$ monoton wachsend auf $[-3,-2]$. $\boxed{1}$
Also gilt $\boxed{1}$
$$\max_{x\in[-3,-2]} \kappa_{rel}(x) = \kappa_{rel}(-2) = 6.$$
Das Problem ist folglich gut konditioniert.

ii) Für die maximale Verstärkung des relative Eingabefehler gilt
$$\delta_f = \left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \approx \kappa_{rel}(x) \left| \frac{\tilde{x} - x}{x} \right| = \kappa_{rel}(x)\delta_x.$$
Nach Teil i) erhält man $\boxed{1}$
$$\delta_f \approx 6\delta_x < 0.03 \quad \Rightarrow \quad \delta_x < 0.005 = 0.5\%$$

b) Wir berechnen zunächst die dividierten Differenzen zu den Stützstellen $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$: $\boxed{3}$

x_i	$[x_i]f$	$[x_i, x_{i+1}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f$	$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f$
−1	4			
		$\frac{1-4}{0+1} = -3$		
0	1		$\frac{1+3}{1+1} = 2$	
		$\frac{2-1}{1-0} = 1$		$\frac{-1-2}{2+1} = -1$
1	2		$\frac{-1-1}{2-0} = -1$	
		$\frac{1-2}{2-1} = -1$		
2	1			

Dann ist das Polynom bestimmt durch $\boxed{1}$
$$\begin{aligned} p(x) &= 4 + (-3)(x+1) + 2(x+1)(x-0) + (-1)(x+1)(x-0)(x-1) \\ &= 4 - 3(x+1) + 2(x+1)x - (x+1)x(x-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 12

a) Gegeben sind die Punkte

i	1	2	3	4
x_i	−3	−1	1	2
y_i	21	83	−49	−18

die gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = \alpha(x^2 - x + 1) + \beta \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - 1$$

liegen. Stellen Sie die Matrix A und die rechte Seite b des linearen Ausgleichsproblems zur Berechnung von $(\alpha, \beta)^T$ auf.

b) Lösen Sie das Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ -13 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe von Givens-Rotationen, ohne die Normalgleichungen aufzustellen. Wie groß ist das Residuum?

2+5=7 Punkte

Lösung:

a) Die Zeilen des Ausgleichsproblems haben die Form

$$A_{i,\cdot} = \left(x_i^2 - x_i + 1 \quad \sin^2\left(\tfrac{\pi x}{2}\right)\right), \quad b_i = y_i + 1.$$

Es folgt $\boxed{1+1}$

$$A = \begin{pmatrix} 13 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 22 \\ 84 \\ -48 \\ -17 \end{pmatrix}.$$

b) Das System wird mit Givens–Rotationen auf Dreiecksgestalt gebracht: $\boxed{3}$

Der Eintrag $(2, 1)$ wird eliminiert:

$$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \ c = \frac{3}{5}, \ s = \frac{4}{5};$$

$$\begin{pmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{r|r} 3 & 7 \\ 4 & 11 \\ -12 & -13 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r|r} 5 & 13 \\ 0 & 1 \\ -12 & -13 \end{array}\right)$$

Der Eintrag $(3, 1)$ wird eliminiert:

$$r = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13, \ c = \frac{5}{13}, \ s = -\frac{12}{13};$$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} \left(\begin{array}{r|r} 5 & 13 \\ 0 & 1 \\ -12 & -13 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{r|r} 13 & 17 \\ 0 & 1 \\ 0 & 7 \end{array}\right)$$

Daraus erhalten wir $\boxed{1}$

$$13x_* = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x_* = \frac{17}{13}.$$

Für das Residuum erhalten wir $\boxed{1}$

$$\|Ax_* - b\|_2 = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50}.$$

Aufgabe 13
Bestimmen Sie eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\left\{\begin{array}{rcl} -6x^2-3y^2+18e^z-3 &=& 0\\ -6x+3y^7+e^{-3z}-7 &=& 0\\ 6x^3-y^3+37z+26 &=& 0\end{array}\right.$$

mit dem Newton-Verfahren, indem Sie vom Startwert $(-1,1,0)^T$ ausgehen und einen Iterationsschritt durchführen.

8 Punkte

Lösung:

Der Vektor (x,y,z) ist eine Lösung des gegebenen Gleichungssystems genau dann, wenn (x,y,z) eine Nullstelle der Funktion

$$F(x,y,z) := \begin{pmatrix} -6x^2-3y^2+18e^z-3\\ -6x+3y^7+e^{-3z}-7\\ 6x^3-y^3+37z+26\end{pmatrix}$$

ist. Das Newton-Verfahren lautet

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}\\ y_{n+1}\\ z_{n+1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n\\ y_n\\ z_n\end{pmatrix} - \left(F'[(x_n,y_n,z_n)]\right)^{-1} F[(x_n,y_n,z_n)].$$

Die Jacobi Matrix: $\boxed{2}$

$$F'(x,y,z) = \begin{pmatrix} -12x & -6y & 18e^z\\ -6 & 21y^6 & -3e^{-3z}\\ 18x^2 & -3y^2 & 37\end{pmatrix}.$$

Berechnen von $F(x_0,y_0,z_0)$ $\boxed{1}$

$$F(-1,1,0) = \begin{pmatrix} -6\cdot(-1)^2-3\cdot 1^2+18\cdot e^0-3\\ -6\cdot(-1)+3\cdot 1^7+e^{-3\cdot 0}-7\\ 6\cdot(-1)^3-1^3+37\cdot 0+26\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 19\end{pmatrix}$$

und $F'(x_0,y_0,z_0)$ $\boxed{1}$

$$F'(-1,1,0) = \begin{pmatrix} -12x & -6y & 18e^z\\ -6 & 21y^6 & -3e^{-3z}\\ 18x^2 & -3y^2 & 37\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -6 & 18\\ -6 & 21 & -3\\ 18 & -3 & 37\end{pmatrix}.$$

Lösung des Gleichungssystems: $\boxed{3}$

$$\begin{pmatrix} 12 & -6 & 18\\ -6 & 21 & -3\\ 18 & -3 & 37\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Delta x_n\\ \Delta y_n\\ \Delta z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 19\end{pmatrix}$$

Die Gaußelimination ohne Pivotisierung ergibt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & 18 & 6\\ -6 & 21 & -3 & 3\\ 18 & -3 & 37 & 19\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & 18 & 6\\ 0 & 18 & 6 & 6\\ 0 & 6 & 10 & 10\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 12 & -6 & 18 & 6\\ 0 & 18 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 8 & 8\end{array}\right)$$

und dann

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x_n\\ \Delta y_n\\ \Delta z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6+6\cdot 0-18\cdot 1)/12=-1\\ (6-6\cdot 1)/18=0\\ 8/8=1\end{pmatrix}.$$

Also die nächste Näherung: $\boxed{1}$

$$\begin{pmatrix} x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -1\end{pmatrix}.$$