Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2004

Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:

(6)

$$\frac{4^n (n!)^2}{(2n)!} > 1 \qquad (n \in \mathbb{N}) .$$

Aufgabe 2: Es sei $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ mit

(8)

$$f(x) = \begin{cases} \cos\Big(4\sqrt{|x|}\Big) & \text{für } -1 < x < 0 \\ \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} & \text{für } 0 \le x < 1 . \end{cases}$$

Man beweise, dass f in $x_0 = 0$ stetig ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$ angibt mit

$$x \in (-1,1) \ \wedge \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon) \ \Rightarrow \ \big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon .$$

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2^n} .$$

Aufgabe 4: Man berechne

(5)

$$\int_2^3 \frac{x^2 dx}{(x^2-1)^2} \qquad \text{(partielle Integration)} .$$

Aufgabe 5: Man beweise mit Hilfe der Taylorformel:

(8)

$$x - \frac{3}{2}\, x^2 \le \frac{\log(1+x)}{1+x} \le x + x^2 \qquad (x \ge 0) .$$

Aufgabe 6: Man bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

(12)

$$\begin{cases} x^2 u''(x) - 2x\, u'(x) + (2 - x^2)\, u(x) + x^3 = 0 , \quad x > 1 ; \\ u(1) = u'(1) = 1 . \end{cases}$$

Hinweis: $u(x) = x \cdot e^{\alpha x}$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$ sind Lösungen der homogenen Differentialgleichung.

---

b i t t e w e n d e n !!!

Aufgabe 7: Man bestimme Maximum und Minimum der Funktion
(10)

$$f(x,y) \;=\; (x-2)(y+2)\;, \quad x^2 \;+\; y^2 \;\le\; \frac{1}{2}\;.$$

Aufgabe 8: Man bestimme das Volumen des Körpers K, der von der Fläche
(9)

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \;=\; 4(x^2+y^2)$$

berandet wird.

Hinweis: Kugelkoordinaten .

Aufgabe 9: Seien das Vektorfeld
(9)

$$f(x,y,z) \;=\; \left(e^x z^2 - y^3,\; x^2 z + e^z,\; y^2 z + e^x\right)$$

und die Raumkurve

$$\Gamma \;=\; \left\{(x,y,z) \;\middle|\; x^2 \;+\; y^2 \;=\; 1\;,\; z \;=\; 2\right\}$$

gegeben. Mittels des Stokesschen Satzes berechne man das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \;\cdot\; d\gamma\;,$$

wobei Γ so orientiert ist, dass $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit dem Durchlaufsinn von Γ eine Rechtsschraube bildet.

Aufgabe 10: Berechnen Sie für die Funktion
(10)

$$f(z) \;=\; \frac{z}{z^2-3z+2}\left\{\exp\left(\frac{2}{z-1}\right) \;-\; 1\right\}\,, \quad z^2 \;-\; 3z \;+\; 2 \;\ne\; 0\;,$$

das Residuum $a := \operatorname{Res}\big(f,1\big)$ in $z=1$.

Ferner gebe man für a eine geschlossene Darstellung an.

Aufgabe 11: Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man
(9)

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} \;-\; \cos t}\;.$$

Hinweis: $\cos t \;=\; \dfrac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$.
