Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Herbst 2003
Höhere Mathematik I, II, III, IV

Aufgabe 1: Man beweise durch vollständige Induktion:

(7)
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \;>\; \frac{1}{3}\, n^3 \;+\; n \qquad (n \;=\; 2, 3, 4, ...) \;.$$

Aufgabe 2: Man zeige, dass die Zahlenfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit

(6)
$$a_n \;=\; \frac{(-1)^{n+1} \;+\; \sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \;-\; \cos(n\pi)}$$

konvergent mit dem Grenzwert $a = 1$ ist, indem man zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N = N(\varepsilon)$ so bestimmt, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N(\varepsilon)$ erfüllt ist.

Aufgabe 3: Man untersuche auf Konvergenz bzw. Divergenz:

(2) **(a)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log(n!)} \quad ,$$

(3) **(b)** $$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n \log(n!)} \quad ,$$

(3) **(c)** $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n!)} \quad .$$

Aufgabe 4:

(2) **(a)** Man beweise, dass die Vektoren

$$a \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;,\quad b \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \;,\quad c \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$ linear unabhängig sind.

(4) **(b)** Man stelle $d \;=\; \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von a, b und c dar.

Aufgabe 5: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) \;:=\; \cos x \;-\; \cos(2x) \;+\; 2\;\cos^3 x \;, \qquad 0 \;<\; x \;<\; \pi \;.$$

(4) **(a)** Man zeige: zu $y = f(x)$ existiert in $0 < x < \pi$ die Umkehrfunktion $x = g(y)$.

(4) **(b)** Man berechne die Zahlenwerte $g(1)$, $g'(1)$, $g''(1)$.

Aufgabe 6: Man beweise: $\quad 2\;\log\cosh x \;>\; x \cdot \tanh x \quad (x \neq 0)$.

(8) **Hinweis:** Es mag nützlich sein, die Funktion

$$f(x) \;:=\; 2\;\log\cosh x \;-\; x \cdot \tanh x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

auf strikte Konvexität zu untersuchen.

Aufgabe 7: Man berechne:

(4)
$$\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x(1 \;+\; \sqrt{x})}} \;.$$

---

b i t t e   w e n d e n !!!

Aufgabe 8: Gegeben sei der Körper $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 < 4,\ -1 < z < 1\}$, das Vektorfeld

(11)

$$f = f(x,y,z) = \big(\sin z\ ,\ y^2 z - \cos x\ ,\ xz^2 + \arctan\,(x \cdot y)\big)\ , \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ ,$$

und die skalare Funktion

$$u = u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^3\ , \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ .$$

Es sei ∂K die Berandung von K und $n \in \mathbb{R}^3$ die äußere Einheitsnormale auf ∂K. Man berechne das Oberflächenintegral

$$I := \int\limits_{\partial K} \big(f + \operatorname{rot} f + \operatorname{grad} u\big) \cdot n\, do\ ,$$

indem man I mit dem Gaußschen Satz in ein Volumenintegral verwandelt und dieses berechnet.

Aufgabe 9: Gegeben sei die Funktion $f\colon\ \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sinh \dfrac{i}{z}$.

(2) **(a)** Man bestimme alle Nullstellen von f: $M = \{z \in \mathbb{C}\colon\ f(z) = 0\}$.

Sei nun $g(z) := \dfrac{1}{f(z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \big(\{0\} \cup M\big)$.

(2) **(b)** Man zeige: $z = 0$ ist keine isolierte Singularität von g .

(3) **(c)** Man zeige: g hat in $z_1 = \dfrac{1}{\pi}$ einen Pol der Ordnung 1; man berechne $\operatorname{Res}\,(g, z_1)$.

(6) **(d)** Man berechne $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \big(g(z) + f(z)\big)\, dz$.

Aufgabe 10: Gegeben sei das in $L^2(0,\pi)$ vollständige Orthonormalsystem

$$\ell_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}}\ ,\ \ell_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \cos(kx)\ , \quad k \in \mathbb{N}\ ,\ x \in [0,\pi]\ .$$

(4) **(a)** Man bestimme für $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$, $x \in [0,\pi]$, die Koeffizienten der Fourier–Reihe

$$T_f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \big(f, \ell_k\big)_{L^2(0,\pi)} \cdot \ell_k(x)\ .$$

(5) **(b)** Bestimmen Sie mit dem Fourier–Ansatz $u(t,x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(t) \cdot \ell_k(x)$ und Koeffizientenvergleich eine formale Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\, u &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u\ , && t > 0\ ,\ 0 < x < \pi\ , \\ \frac{\partial}{\partial x}\, u(t,0) &= \frac{\partial}{\partial x}\, u(t,\pi)\ , && t > 0\ , \qquad\qquad (*) \\ u(0,x) &= f(x)\ , && 0 < x < \pi\ . \end{aligned}$$

Geben Sie auch den dadurch gewonnenen homogenen Lösungsoperator $e^{tA}\colon L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ für $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ (mit $(*)$ als Randbedingung) an.

(5) **(c)** Berechnen Sie mit Hilfe der Formel der Variation der Konstanten die (formale) Lösung der inhomogenen partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\, u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u + t\cos(x)\ , \quad t > 0\ ,\ 0 < x < \pi\ ,$$

welche die Anfangs- und Randbedingungen aus Teilaufgabe **(b)** erfüllt.

Hinweis: Formulieren Sie zunächst obiges Problem als abstraktes Anfangswertproblem für $u = u(t)$ mit Werten in $L^2(0,\pi)$.

(5) **(d)** Man zeige: Für die Lösungen aus Teil **(b)** und **(c)** gilt $u(t,\cdot) \in H^\ell(0,\pi)$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und $t > 0$.

Hinweis: Es mag von Vorteil sein, zunächst Sobolevräume bez. des obigen Orthonormalsystems zu betrachten.
