Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. S. Maier–Paape
Aufgaben zur Diplom–Vorprüfung im Frühjahr 2004

Teil B

Höhere Mathematik III + IV,
Numerische Mathematik,

Aufgabe 1: *(9)* Man bestimme das Volumen des Körpers K, der von der Fläche

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \;=\; 4(x^2+y^2)$$

berandet wird.

Hinweis: Kugelkoordinaten .

Aufgabe 2: *(9)* Seien das Vektorfeld

$$f(x,y,z) \;=\; \left(e^x z^2 - y^3,\; x^2 z + e^z,\; y^2 z + e^x\right)$$

und die Raumkurve

$$\Gamma \;=\; \Big\{(x,y,z) \;\Big|\; x^2 \,+\, y^2 \,=\, 1\;,\; z \,=\, 2\Big\}$$

gegeben. Mittels des Stokesschen Satzes berechne man das Kurvenintegral

$$\int_\Gamma f \;\cdot\; d\gamma\;,$$

wobei Γ so orientiert ist, dass $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ mit dem Durchlaufsinn von Γ eine Rechtsschraube bildet.

Aufgabe 3: *(5)* Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &u \;+\; (x+2u+1)\;\cdot\; u' \;=\; 0\;, \quad x \;>\; 1\;,\\ &u(1) \;=\; -2\;. \end{aligned}$$

---

b i t t e w e n d e n !!!

Aufgabe 4: *(10)* Man bestimme alle gebrochenen linearen Abbildungen

$$w \;=\; f(z) \;=\; \frac{az+b}{cz+d} \qquad \left(ad \;-\; bc \;\neq\; 0\;,\; z \;\neq\; -\,\frac{d}{c}\;\right),$$

welche die Fixpunkte 0 und 1 haben und zusätzlich

$$f(\infty) \;=\; \frac{1+i}{2}$$

erfüllen.

Man ermittle das Bild von $G \;=\; \left\{z \in \mathbb{C}\colon\; \left|z \;-\; \frac{1}{2}\right| \;<\; \frac{1}{2}\right\}$ unter der Abbildung f.

Aufgabe 5: *(10)* Berechnen Sie für die Funktion

$$f(z) \;=\; \frac{z}{z^2-3z+2}\left\{\exp\left(\frac{2}{z-1}\right) \;-\; 1\right\},\quad z^2 \;-\; 3z \;+\; 2 \;\neq\; 0\;,$$

das Residuum $a := \operatorname{Res}\big(f,1\big)$ in $z=1$.

Ferner gebe man für a eine geschlossene Darstellung an.

Aufgabe 6: *(9)* Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{\sqrt{2} \;-\; \cos t} \quad .$$

Hinweis: $\cos t \;=\; \dfrac{1}{2}\left(e^{it}+e^{-it}\right)$.