Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Mathematik, Prof. Dr. J. Bemelmans
Anwesenheitsübung zur Höheren Mathematik IV
SS 1995

---

1. Aufgabe: (2)

Es sei $M_1 = \{z \mid z \in \mathbb{C}\ ,\ z^6 = -64\ ,\ \operatorname{Re} z = 0\}$ und $M_2 = \{z \mid z \in \mathbb{C}\ ,\ z^2 = -4\}$.

Man beweise: $M_1 = M_2$.

---

2. Aufgabe: (2,5)

Gibt es eine auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ analytische Funktion f mit

$$\operatorname{Im} f(z) = 2x - \frac{4y}{x^2+y^2} \quad \Big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\Big)\ ?$$

Wenn ja, dann bestimme man $f(z)$, $f''(1)$.

---

3. Aufgabe: (2,5)

a.) Man bestimme diejenige gebrochen–lineare Abbildung $w = f(z)$, welche die Punkte $z_1 = 0\ ,\ z_2 = 1\ ,\ z_3 = \infty$ der Reihe nach auf $w_1 = 0\ ,\ w_2 = i\ ,\ w_3 = 2i$ abbildet.

b.) Man bestimme das Bild der Menge

$$M = \big\{z \mid z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| > 1\big\}\ .$$

---

4. Aufgabe: (4)

Man entwickle die Funktion

$$f(z) = \left(\frac{1}{3}\right)^{z-1} - z \log\left(1 + \frac{2}{z-1}\right)$$

in $2 < |z-1| < \infty$ in eine Laurentreihe. (Hierbei ist stets $\log\zeta = \log|\zeta| + i \arg\zeta$ mit $-\pi < \arg\zeta \le \pi$ für $\zeta \in \mathbb{C}\ ,\ \zeta \neq 0$)

---

5. Aufgabe: (4)

Betrachtet wird die Funktion

$$F(z) := \oint_{|\zeta|=2} \frac{z^2 - 2\zeta z}{\zeta^2(\zeta - z)^2}\, e^{i\zeta}\, d\zeta \qquad (\ |z| < 2\ )\ .$$

a.) Man gebe für $F(z)$ ein integralfreie Darstellung an.

b.) Es sei K eine reguläre Kurve im Innern des Kreises $\Gamma = \big\{z \mid z \in \mathbb{C}\ ,\ |z| < \frac{5}{3}\big\}$, welche $z = 0$ mit $z = \frac{\pi}{2}$ verbindet. Man berechne den Zahlenwert von $\int_K F(z)\, dz$.

---

6. Aufgabe: (1)

Mit Hilfe des Residuensatzes berechne man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^2}\ .$$
